

Об алгебраической независимости некоторых функций

П.Ю. Козлов

В 1969г. К. Малер доказал, что функции Рамануджана

$$P(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) z^n, \quad Q(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) z^n, \quad R(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) z^n,$$

где $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$. Эти функции при подстановке $z = e^{2\pi i\tau}$, $\tau \in \mathbb{C}$, $\Im \tau > 0$, совпадают с так называемыми рядами Эйзенштейна.

Рассмотрим семейство функций

$$G_{i,j}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^i \sigma_{-2j-1}(n) z^n, \quad 0 \leq j, \quad 0 \leq i \leq 2j.$$

Они вместе с функциями Рамануджана составляют решение некоторой системы алгебраических дифференциальных уравнений с коэффициентами в поле рациональных функций от z . В докладе будет обсуждаться доказательство следующего утверждения

Теорема. Для любого целого неотрицательного числа t функции $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ и $G_{i,j}(z)$, $0 \leq i \leq 2j \leq 2t$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$.

Заметим, что числа $\pi, \Gamma(1/4)$ выражаются через значения функций Рамануджана в точке $z = e^{-2\pi}$, а через числа $G_{i,j}(e^{-2\pi})$ могут быть выражены значения дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в нечётных целых точках.