Доказуемость и формальная арифметика
Базовая кафедра МИАН, МФТИ, 2021 г.

Л.Д. Беклемишев и Т.Л. Яворская

1 Π^1_1-некорректные теории и их ординалы

Теорема 1.1 *Пусть T — перечислимая, Π^1_1-некорректная теория, содержащая ACA_0. Тогда $ord(T) = \omega_1^{CK}$.*

Доказательство. Заметим, что по определению $\mathrm{ord}(T)$ не может превосходить ω_1^{CK}, поскольку является супремумом порядковых типов некоторого множества примитивно рекурсивных вполне упорядочений. Докажем обратное неравенство.

Пусть $(X, \prec_X)$ — произвольное примитивно рекурсивное вполне упорядочение (п.р.в.у.). Построим п.р.в.у. $(P, \prec_P)$ такое, что

1. $T \vdash \mathrm{TI}(P, \prec_P)$,
2. $(X, \prec_X)$ вложимо в $(P, \prec_P)$ (в обычном теоретико-множественном смысле).

Тогда мы получим, что $ot(X, \prec_X) \leq ot(P, \prec_P)$, а значит $ot(X, \prec_X) \leq \mathrm{ord}(T)$. Тем самым будет показано, что $\mathrm{ord}(T)$ превосходит порядковый тип любого п.р.в.у., что и требуется.

Для построения P воспользуемся Π^1_1-некорректностью теории T и рассмотрим ложное Π^1_1-предложение π доказуемое в T. Мы знаем, что с таким π можно связать п.р. линейно упорядоченное множество $(Y, \prec_Y)$, которое не фундировано, но $T \vdash \mathrm{TI}(Y, \prec_Y)$.

Рассмотрим следующее п.р. частично упорядоченное множество $(Z, \prec_Z$) такое, что

1. $Z := X \times Y := \{\langle x, y\rangle : x \in X,\ y \in Y\}$. Как всегда, считаем пары $\langle x, y\rangle$ закодированными по Кантору и Z подмножеством $\mathbb{N}$.
2. $\langle x, y\rangle \prec_Z \langle x', y'\rangle \overset{\mathrm{def}}{\iff} (x \prec_X x' \wedge y \prec_Y y')$. Обратим внимание, что подразумевается убывание одновременно по обеим координатам.

Заметим, что

- $(Z, \prec_Z)$ — строгий частичный порядок.
- $(Z, \prec_Z)$ — фундирован, т.к. убывающая последовательность убывает по первой координате.
- $T \vdash \mathrm{TI}(Z, \prec_Z)$. Аналогичное рассуждение по второй координате формализуемо в T: Если подмножество $A \subseteq Z$ непусто, то рассмотрим его вторую проекцию, выберем минимальный элемент y_0 этой проекции и любую пару $\langle x_0, y_0 \rangle \in A$. Тогда эта пара — минимальный элемент A.

Пусть $\mathcal{B}$ — дерево убывающих последовательностей в $(Z, \prec_Z)$, а $(P, \prec_P)$ — порядок Клини–Брауэра на нём. Мы знаем, что $(P, \prec_P)$ — и фундированный, и доказуемо фундированный, то есть $T \vdash \mathrm{TI}(P, \prec_P)$, поскольку таковы $(Z, \prec_Z)$ и $\mathcal{B}$.

Осталось показать, что $(X, \prec_X)$ вкладывается в $(P, \prec_P)$. Рассмотрим бесконечную убывающую последовательность $y_0 \succ_Y y_1 \succ_Y y_2 \succ_Y \ldots$ элементов Y. Дерево $\mathcal{B}$ содержит поддерево

$$\mathcal{B}' := \{\sigma \in \mathcal{B} : \sigma = \langle \langle x_0, y_0 \rangle, \langle x_1, y_1 \rangle, \ldots, \langle x_k, y_k \rangle \rangle \text{ для некоторых } x_0 \succ_X x_1 \succ_X \cdots \succ_X x_k\} \quad (1)$$

Заметим, что $\mathcal{B}'$ изоморфно дереву убывающих последовательностей в $(X, \prec_X)$, поскольку последовательность (y_i) фиксирована. Поэтому $(X, \prec_X)$ вкладывается в порядок Клини–Брауэра на $\mathcal{B}'$ (по доказанной ранее лемме). С другой стороны, порядок Клини–Брауэра на $\mathcal{B}'$ является ограничением соответствующего порядка на объемлющем дереве $\mathcal{B}$, то есть порядка $(P, \prec_P)$. Отсюда получаем, что $(X, \prec_X)$ вкладывается в $(P, \prec_P)$. $\dashv$