

О промежуточных диофантовых экспонентах

О. Н. Герман

Классическая диофантова экспонента матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ определяется как супремум вещественных чисел γ , для которых существуют сколь угодно большие t , такие что система неравенств

$$|\mathbf{x}| \leq t, \quad |\Theta \mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq t^{-\gamma}$$

имеет ненулевое решение в $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}^n$. С геометрической точки зрения эта величина характеризует, насколько хорошо некое подпространство в $\mathbb{R}^{m+n}$, соответствующее матрице Θ , приближается одномерными рациональными подпространствами.

Доклад будет посвящён многомерному обобщению этого понятия, то есть вместо одномерных рациональных подпространств мы будем рассматривать рациональные подпространства $\mathbb{R}^{m+n}$ произвольных размерностей. Чтобы достичь успеха на этом пути нам понадобится так называемая “параметрическая геометрия чисел” Вольфганга Шмидта, в которой он приходит к похожим объектам, рассматривая асимптотики последовательных минимумов параллелепипедов относительно однопараметрических семейств решёток. Кроме того, не лишней на этом пути окажется точка зрения Мишеля Лорана, который не так давно придумал интересующее нас обобщение для случая, когда либо m , либо n равно 1, воспользовавшись аппаратом полилинейной алгебры.

В итоге мы сформулируем ряд соотношений для построенных “промежуточных” экспонент, обобщающих некоторые классические, а также полученные совсем недавно соотношения для обыкновенных диофантовых экспонент. В частности, мы представим неравенство Дайсона, обобщающее принцип переноса Хинчина на случай произвольной матрицы, в виде цепочки неравенств для промежуточных экспонент.