Задача о наилучшем многополосном фильтре

Андрей Богатырев

ИВМ РАН, МЦФПМ, МГУ, МФТИ

Гончар-90, Мемориальная конференция
29 марта 2022

Электрические фильтры

Разработка современных электронных устройств часто приводит к содержательным математическим задачам. Частотно-селективные устройства (фильтры) бывают различны по их физическому исполнению:

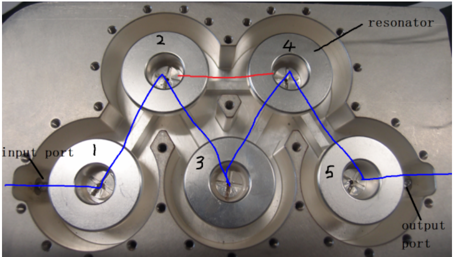
1. Аналоговые (RCLM- цепи)
2. Цифровые (разностная схема)
3. Микроволновые (резонаторы соединенные волноводами)

но приводят к похожим задачам оптимизации.

Сигналы и их обработка

Аналоговые	Цифровые
Функция $x(t), t \in \mathbb{R}$	Последовательность $x(n), n \in \mathbb{Z}$
$x(t) \to \boxed{RCLM..\text{-scheme}} \to y(t)$	$y(n) = \sum_{j=0}^{N} p_j x(n-j)$
$P_N(D)[x(t)] = Q_M(D)[y(t)]$	$+\sum_{j=1}^{M} q_j y(n-j)$
Преобразование Фурье (Лапласа)	Z- преобразование (производящая функция)
$\hat{h}(\omega) = P_N(i\omega)/Q_M(i\omega)$	$\hat{h}(z) = P_N(z)/Q_M(z)$

Словарь: h – импульсная характеристика, $\hat{h}$ – передаточная функция, $|\hat{h}|$ – Амплитудно-частотная и $Arg\ \hat{h}$ – фазо-частотная характеристики.



Синтез фильтров

Синтез (многополосных) фильтров проводят в две стадии:

Задача аппроксимации, нахождение АЧХ с нужной спецификацией.
Задача реализации – синтез архитектуры и нахождение значений структурных элементов прибора, реализующего эту характеристику.
Обе проблемы привлекали внимание ведущих математиков своего времени: Е.И.Золотарева, Н.И.Ахиезера, Р.Фостера, Э.Штифеля, А.А.Гончара, В.Кауэра, О.Брюне, Р.Ботта, Р.Даффина, В.Н. Малоземова, Л.Баратшара и др.

Задача аппроксимации

Задача аппроксимации

Математическая постановка (основной) задачи
Дано: $E = E^+ \cup E^- \subset \mathbb{R}$ — конечный набор диапазонов оси частот; $E^\pm = \cup_j E_j^\pm$ — полосы пропускания $(+)$ и задержки $(-)$.
Соревнование среди вещественных рациональных функций $R(x) = P(x)/Q(x)$ ограниченной степени $\deg R \leq n$.
Целевая функция
1.

$$\frac{\max_{x\in E^+}|R(x)|}{\min_{x\in E^-}|R(x)|} \longrightarrow \min =: \theta^2$$

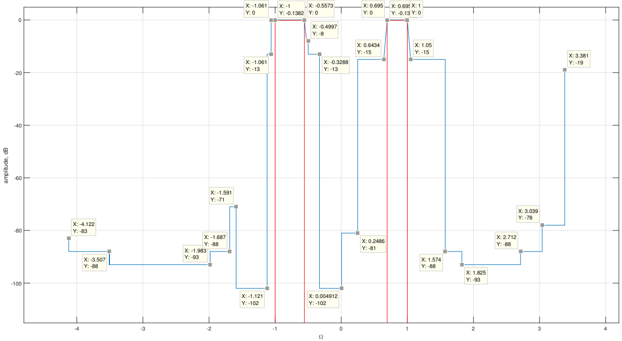
2. Зададим индикаторную функцию $F(x) = \pm 1$, если $x \in E^\pm$

$$||R_* - F||_{C(E)} := \max_{x\in E}|R_*(x) - F(x)| \to \min =: \mu.$$

$1/\mu = (\theta + 1/\theta)/2.$

Тема и вариации

- Приближение с весом
- Фиксация части нулей/полюсов
- Фильтрующие функции с комплексным числителем
- Дополнительные симметрии
- Вписывание АЧХ в маску фильтра



История задачи

Е.И. Золотарев (1847-1878, Россия) изобрел 'Дроби Золотарева', аналог Чебышевских многочленов в мире рациональных функций.

В.Кауэр (1900-1945, Германия) изобрел фильтры высоких и низких частот 'Cauer electrical filters'

Bell Laboratories

Bell Labs (1925 - 2016, USA) внедрила эти фильтры в инженерную практику

Исследование задачи оптимизации

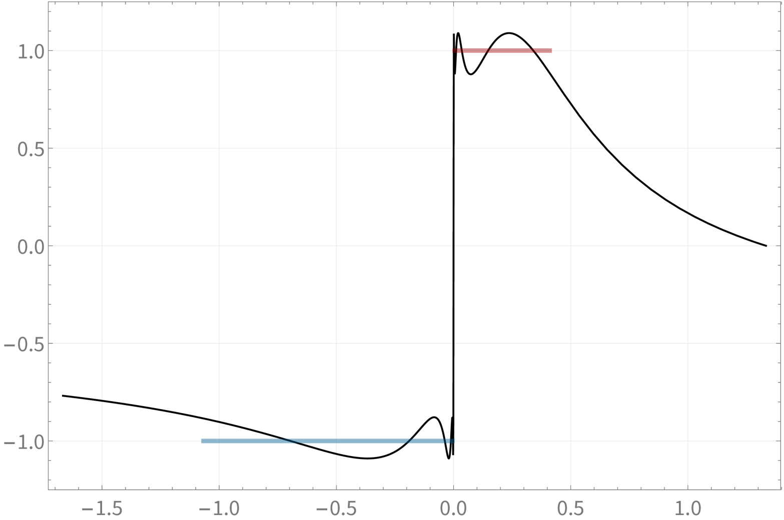
- E.I.Zolotarev 1877; N.I.Akhiezer 1928; E.Stiefel 1960–, R.A.-R.Amer, H.R.Schwarz, 1964; Gonchar A.A. 1969; V.N.Malozemov, 1978; L.Baratchart 2000-; АБ 2010–
- Многоэкстремальность; Штифель: топ. классы
- Альтернансная характеризация (=equiripple property): Ошибка $\delta(x) = R(x) - F(x)$ имеет в общем случае $2n+2$ точек альтернанса $x_s \in E$: $\delta(x_s) = \pm||\delta||_E$
- Проективная инвариантность: A.B. Bogatyrev, "Projective view at optimization problem for multiband filter", Proceedings of AMS, 149:7 (2021),

В некотором смысле решение задачи очень простое – нужно предъявить функцию с требуемым осцилляционным поведением

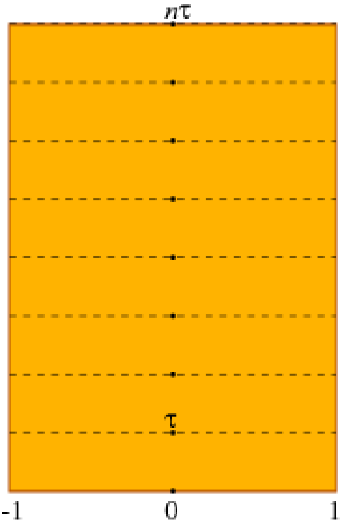
Пример: дробь Золотарева

1877: $E^{\pm} = \pm[1, 1/k]$, $0 < k < 1$, $F(x) = Sign(x)$

Решение можно выразить в терминах эллиптических функций и имеет вид



Дробь Золотарева 2



$$x_\tau(u) : \Pi_\tau, -1, 0, 1 \longrightarrow \mathbb{H}, -1, 0, 1$$

$$Z_n(x_{n\tau}(u)) = x_\tau(u)$$

$$x_\tau(u) = sn(K(\tau)u|\tau)$$

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{\pi}{2}\theta_3^2(\tau)$$

$$k = (\theta_2(\tau)/\theta_3(\tau))^2$$

Реклама: Z_n имеет много интересных свойств!

Работа А.А.Гончара 1969 г.

А. А. Гончар,
О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями, Матем. сб., 1969, том 78(120), номер 4, 640-654

Теорема 1:

$$\lim_{n\to\infty}(\theta_n(E^+,E^-))^{1/n} = \exp(-1/C(E^+,E^-)),$$

где $C(E^+,E^-)$ – емкость конденсатора с обкладками E^+, E^-.

Подходы к решению

- Прямая численная оптимизация основанная на (суб)градиентном спуске либо методах типа Ремеза. Внутренняя неустойчивость, трудности с начальным приближением.
- Инженерный (модульный) подход: разложить задачу на простые и использовать однополосные фильтры (Кауэра-Золотарева). Существенный рост степени фильтра (и следовательно размер, вес, стоимость производства, рассеяние энергии и необходимость охлаждения...)
- Метод анзатца – явная аналитическая формула для решения, обобщающая формулы Золотарева. [Stiefel, 1960], [B., 2010]; [B., Goreinov, Lyamaev, 2017]

Принцип Альтернанса и Чебышевский Анзац

Критерий оптимальности в задачах чебышевского типа – это волнообразное поведение функции ошибки, известное как equiripple property или принцип альтернанса: имеется много точек, в которых ошибка приближения принимает свое наибольшее по модулю значение с последовательной переменой знака.

Функции с таким поведением нетипичны и заметают многообразие малой размерности в соответствующем пространстве функций. Это многообразие можно попробовать описать при помощи аналитических формул, содержащих параметры (анзаца).

Новый подход: чебышевский анзац

Точка альтернанса, лежащая внутри множества E, неизбежно является критической для решения R. В золотаревской постановке, в этой точке принимается одно из четырех значений: $\pm 1 \pm \mu$, где μ – величина глобального отклонения, и число таких точек почти равно общему числу $2n - 2$ критических точек рациональной функции степени n.
Это означает, что почти все критические точки функции R (кроме небольшого числа исключений) – простые со значениями в 4-элементном множестве $\mathsf{Q} := \pm 1 \pm \mu$. Число исключений считается по простой формуле, учитывающей кратности критических точек и выпадение критических значений из множества выделенных значений Q.
Сравните: Функции Белого и многочлены Шабата. Dessin d'Enfants $\to$ другие рисунки.

Новый подход: чебышевский анзац, 2

Это удивительное свойство решений совершенно не типично для рациональных функций. Анализ функционального уравнения типа Пелля-Абеля дает малопараметрическое представление решения

$$R(x) = \mathrm{sn}\left(\int_{(e,0)}^{(x,w)} d\zeta + A(e) \,\middle|\, \tau\right), \tag{1}$$

в котором модуль τ связан с отклонением μ, а $d\zeta$ – голоморфный дифференциал на заранее неизвестной гиперэллиптической римановой поверхности с ветвлением в точках $e \in \mathbb{C}$, в которых функция $R(x)$ принимает значения исключительного множества Q с нечетной кратностью. Род g этой кривой на 1 больше числа исключительных критических значений функции.

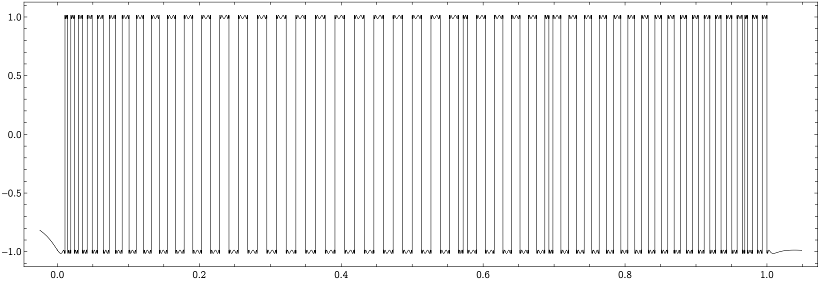
Новый подход: чебышевский анзац, 3

Возникающая поверхность не произвольна: на ней есть голоморфный диференциал $d\zeta$, все периоды которого лежат в решетке периодов эллиптического синуса. Это следует из независимости значения вопроизводимого решения от пути интегрирования по поверхности.

Такие кривые уже встречались в математике: это кривые Калождеро-Мозера, описывающие динамику точек на торе, взаимодействующих с потенциалом $\wp(u)$.

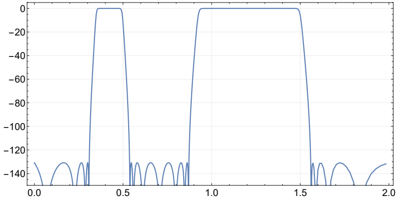
Примеры АЧХ многополосных фильтров (все вычислены Сергеем Лямаевым)

В предисловии к книге [SA] Э.Штифель пишет: "He [H.R.Schwarz] generalizes the Zolotareff line of approach to the case of a single pass-band and two stop-bands. [...] It is definitely impossible to treat more general cases by this method."

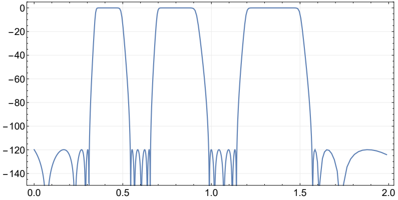


АЧХ оптимального фильтра с 99 рабочими полосами.
На данный момент наш рекорд 121 рабочая полоса.

АЧХ с сильным подавлением при задержке



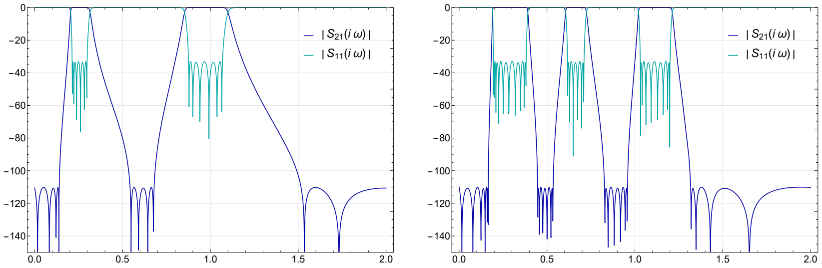
Optimal magnitude response of order 34 with ripple magnitude at the passbands $-5.10^{-5}dB$ and attenuation of $-130dB$ at the stopbands



Optimal magnitude response of order 38 with ripple magnitude at the passbands $-10^{-5}dB$ and attenuation of $-120dB$ at the stopbands

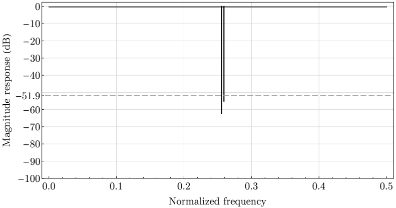
Cf: 120 dB – это шум от взлетающего истребителя!

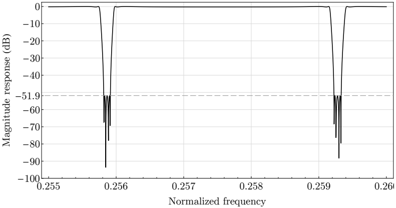
Синтез микроволновых фильтров



Scattering matrix elements: orders $n = 12$ (left) and $n = 24$ (right) with ripple magnitude at the passbands $-0.1dB$; attenuation of $-110dB$ at the stopbands.

Сравнение с другими подходами





АЧХ оптимального двойного режекторного фильтра порядка 16

Картинка увеличена вблизи вырезаемых частот

Составной фильтр той же спецификации имеет степень от $n = 24$

Источники

Zolotarëv, E.I., Application of Elliptic Functions to Questions on Functionsc Deviating Least and Most from Zero, *Zap. Imp. Akad. Nauk St. Petersburg*, vol. 30, no. 5 (1877), pp. 1–71.

Achïeser, N.I., Sur un problème de E. Zolotarëv, *Bull. Acad. Sci. de l'URSS*, VII sér., 1929, no. 10, pp. 919–931.

Achieser, N.I., Elements of the theory of elliptic functions, (Russian). Leningrad 1948; Transl. of Math. Monographs, 79, AMS, Providence, RI, 1990. viii+237 pp.

Achieser, N.I., Theory of Approximation (Monograph) –M: Nauka, 1965; Dover Publications, 1992.

Cauer, W., *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*, Bd. 1, Leipzig: Becker und Erler, 1941; Bd. 2, Berlin: Akademie, 1960.

Источники 2

E. Stiefel, Le problème d'approximation dans la théorie des filtres électriques, //Colloque sur l'analyse numérique à Mons, 1961, pp. 81–87.

E. Stiefel, Methods – old and new – for solving the Chebyshev approximation problem // J.SIAM (B) 1, 164–176.

R. A.-R. Amer and H. R. Schwarz, Contributions to the approximation problem of electrical filters. Mitt. Inst. Angew. Math. (1964), No. 9, Birkhäuser, Basel. 99pp.

Gonchar, A.A., The Problems of E.I. Zolotarëv Which Are Connected with Rational Functions, *Mat. Sb.*, 1969, vol. 78 (120), no. 4, pp. 640–654.

Malozemov, V.N., The Synthesis Problem for a Multiband Electrical Filter, *Comput. Math. and Math. Physics*, 1979, vol. 19, no. 3, pp. 601–609.

Источники 3

A.B. Bogatyrëv, Extremal Polynomials and Riemann Surfaces, MCCME 2005; Springer 2012.

A. B. Bogatyrëv, "Chebyshev representation for rational functions" Sbornik Math. 2010; 201(11), 1579–1598.

A. B. Bogatyrëv, S. A. Goreinov, S. Yu. Lyamaev, "Analytical approach to multiband filter synthesis and comparison to other approaches", Problems Inform. Transmission, 53:3 (2017), 260–273

A.B. Bogatyrev, "Projective view at optimization problem for multiband filter", Proceedings of AMS, 149:7 (2021), 3021-3035

Спасибо за Ваше терпение!