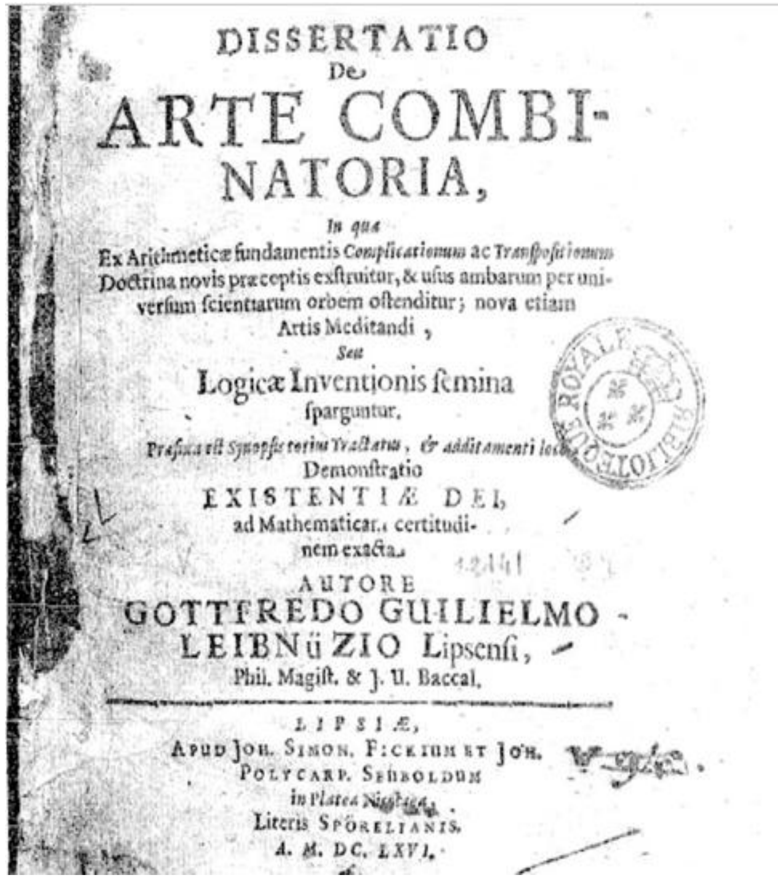
# Из истории комбинаторного анализа: от идеи до научных школ

Алябьева В.Г.

# Г. В. Лейбниц (1646-1716)

**Лейбниц возвёл комбинаторику в ранг универсального метода исследования**.

# Dissertatio de Arte Combinatoria



DISSERTATIO
DE
ARTE COMBINATORIA,

*In qua*
Ex Arithmeticæ fundamentis *Complicationum* ac *Transpositionum* Doctrina novis præceptis exstruitur, & usus ambarum per universum scientiarum orbem ostenditur; nova etiam Artis Meditandi,
*Seu*
Logicæ Inventionis semina sparguntur.

*Præfixa est Synopsis totius Tractatus, & additamenti loco* Demonstratio EXISTENTIÆ DEI, ad Mathematicam certitudinem exacta.

AUTORE
GOTTFREDO GUILIELMO LEIBNüZIO Lipsensi,
Phil. Magist. & J. U. Baccal.

LIPSIÆ,
APUD JOH. SIMON. FICKIUM ET JOH. POLYCARP. SEUBOLDUM
in Platea Nicolæa.
Literis SPÖRELIANIS.
A. M. DC. LXVI.

# ars combinatoria

- Лейбниц говорил о «ars combinatoria», философском термине, которому он придавал различные значения в течение своей жизни
- В понимании Лейбница «комбинаторная наука» включала в себя не только алгебру и теорию чисел, но и затрагивала все области математики, известные в его время.

# Э. Кноблох – исследователь неопубликованных рукописей Лейбница

- *Knobloch E*. Die mathematischen Studien von G.W. Leibniz zur Kombinatorik, Auf Grund fast ausschließlich handschriftlicher Aufzeichnungen dargelegt und kommentiert. Wiesbaden **1973**.  **277** S.
- *Knobloch E.* Die mathematischen Studien von G.W. Leibniz zur Kombinatorik, Textband, im Anschluß an den gleichnamigen Abhandlungsband zum ersten Mal nach den Originalhandschriften herausgegeben. Wiesbaden **1976**.
- *Knobloch* E. Der Beginn der Determinantentheorie: Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkul. Textband. 1980.

Вопреки своим планам Лейбниц никогда не публиковал каких-либо математических дополнений в Ars

# Цитаты из работ Э. Кноблоха

- 1. Вопреки своим планам Лейбниц никогда не публиковал каких-либо математических дополнений к Ars Combinatoria, за исключением короткого эссе по теории вероятностей (1690 г.), но сотни рукописей среди более чем 7300 страниц математического материала, который он оставил, свидетельствуют о многочисленных исследованиях в этой области.

# Цитаты из работ Э.Кноблоха

- Не считая тех исследований, которые касаются исключительно теории чисел или алгебраических задач, соответствующие заметки можно грубо сгруппировать по пяти заголовкам:
- 1. Комбинаторная теория в более узком смысле (основные комбинаторные операции).
- 2. Симметричные функции (вместе с теорией уравнений).
- 3. Разбиения (часть аддитивной теории чисел).
- 4. Детерминанты (исключение неизвестных в системах уравнений высшей степени).
- 5. Теория вероятностей и смежные области (теория игр, расчет ренты и процентов)

# Цитаты из Е. Кноблоха

- Лейбниц получил многие результаты, которые другие математики опубликовали лишь много десятилетий спустя.
- Среди них рекурсивная формула  для числа разбиений натурального числа **n на k** слагаемых (**впервые опубликована Эйлером в 1751 г.**),
- **числа Стирлинга второго рода (впервые опубликована в 1730 г.)** и несколько частных случаев **общей формулы для разбиений**, опубликованной только в **1840 г**. Штерном.

# Analysis situs

- Идея Лейбница об **analysis situs (**письмо к Гюйгенсу от 8 сентября 1679 г.: "...я еще не доволен алгеброй, так как она не даёт для геометрии ни кратчайших путей, ни наиболее изящных конструкций. Вот почему по поводу этого я думаю, что нам необходимо иметь еще другой анализ – собственно геометрический или линейный, который непосредственно давал бы нам **выражения по месту** (situm) так же, как алгебра дает выражения по величине (magnitudinem). И я полагаю, что вижу средство для этого и что можно было бы представить фигуры и даже машины и движения буквами, как алгебра представляет числа и величины"

# Л.Эйлер, 1707-1783

# *Л. Эйлер.* Задача о кёнигсбергских мостах

- *L. Euler*, Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,1736 (1741; Berlin, 1759)
- В дополнение к той части геометрии, которая имеет дело с количествами и которая всегда возбуждала особый интерес, существует другая - фактически ещё неизвестная - часть. которую впервые упомянул Лейбниц и которую он назвал **геометрией положения. Эта часть геометрии занимается именно тем, что может быть определено только положением, а также исследованием свойств положения; в этом смысле она не будет касаться ни количеств, ни их вычисления.**

# *Эйлер*. Задачи на шахматной доске

- *L. Euler,* Solution d’une question curieuse que ne paroit soumise o aucune analyse, Memoires de l’academie des sciences de Berlin, 15 (1759.) (1766), 310–337.
- Эйлер рассмотрел задачи построения обходов шахматной доски (и ее обобщений) **шахматным конем**, которые являются частными случаями задачи о гамильтоновых путях. Это была первая серьезная математическая статья, посвященная способам построения обходов квадратных и прямоугольных досок ходом шахматного коня.

# Л.ЭЙЛЕР - Задача о 36 офицерах

- Л. Эйлер. Исследование магического квадрата нового типа (8 марта 1779 г.)
- Весьма любопытный вопрос. который привлекал в течение некоторого времени внимание лучших умов мира, заставил меня выполнить исследования, которые, кажется, открыли новое направление в анализе, и, в частности. в комбинаторике. Этот вопрос касается совокупности 36 офицеров, 6 различных званий, взятых из шести разных полков, которых выстраивают в каре таким образом, чтобы в каждом ряду как по горизонтали, так и по вертикали находились шесть офицеров различных званий и из различных полков.

# Л. Эйлер. Задача о 36 офицерах

- Эйлер обозначает шесть различных полков **латинскими** буквами, шесть различных офицерских званий **греческими** *β, γ, δ, ε, ζ.*
- Тогда каждый офицер определяется двумя буквами: латинской и греческой, т.е при помощи следующих 36 упорядоченных пар:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a\alpha$ | $a\beta$ | $a\gamma$ | $a\delta$ | $a\varepsilon$ | $a\xi$ |
| $b\alpha$ | $b\beta$ | $b\gamma$ | $b\delta$ | $b\varepsilon$ | $b\xi$ |
| $c\alpha$ | $c\beta$ | $c\gamma$ | $c\delta$ | $c\varepsilon$ | $c\xi$ |
| $d\alpha$ | $d\beta$ | $d\gamma$ | $d\delta$ | $d\varepsilon$ | $d\xi$ |
| $e\alpha$ | $e\beta$ | $e\gamma$ | $e\delta$ | $e\varepsilon$ | $e\xi$ |
| $f\alpha$ | $f\beta$ | $f\gamma$ | $f\delta$ | $f\varepsilon$ | $f\xi$ |

$n = 2, 3, 4, 5$

# Решение задачи офицеров для n=5

- Эйлер исследовал общую проблему офицеров, доказал существование решений для n=2,3,4,5.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $1^1$ | $2^5$ | $3^4$ | $4^3$ | $5^2$ |
| $2^2$ | $3^1$ | $4^5$ | $5^4$ | $1^3$ |
| $3^3$ | $4^2$ | $5^1$ | $1^5$ | $2^4$ |
| $4^4$ | $5^3$ | $1^2$ | $2^1$ | $3^5$ |
| $5^5$ | $1^4$ | $2^3$ | $3^2$ | $4^1$ |

# Гипотеза Эйлера

- Эйлер о 36 офицерах:«Однако после всех трудов, затраченных на решение этой задачи, я был вынужден признать. что такое решение абсолютно невозможно, хотя и не удалось дать строгого доказательства этому».

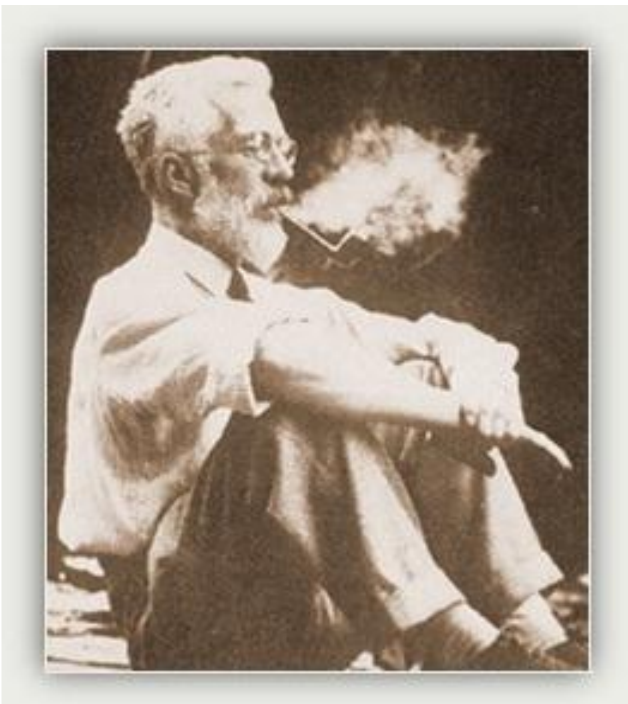
- Эйлер сформулировал гипотезу: ни для какого нечётно-чётного числа не существует полного квадрата со стороной $n$.

# Применение латинских квадратов

- Сэр Рональд Фишер, профессор генетики Калифорнийского университета и один из ведущих мировых статистиков и биологов своего времени, был первым, кто еще в начале 1920-х годов показал, как использовать латинские квадраты в аграрных исследованиях.

# Рональд Фишер (1890-1962)

- Сэр Рональд Фишер



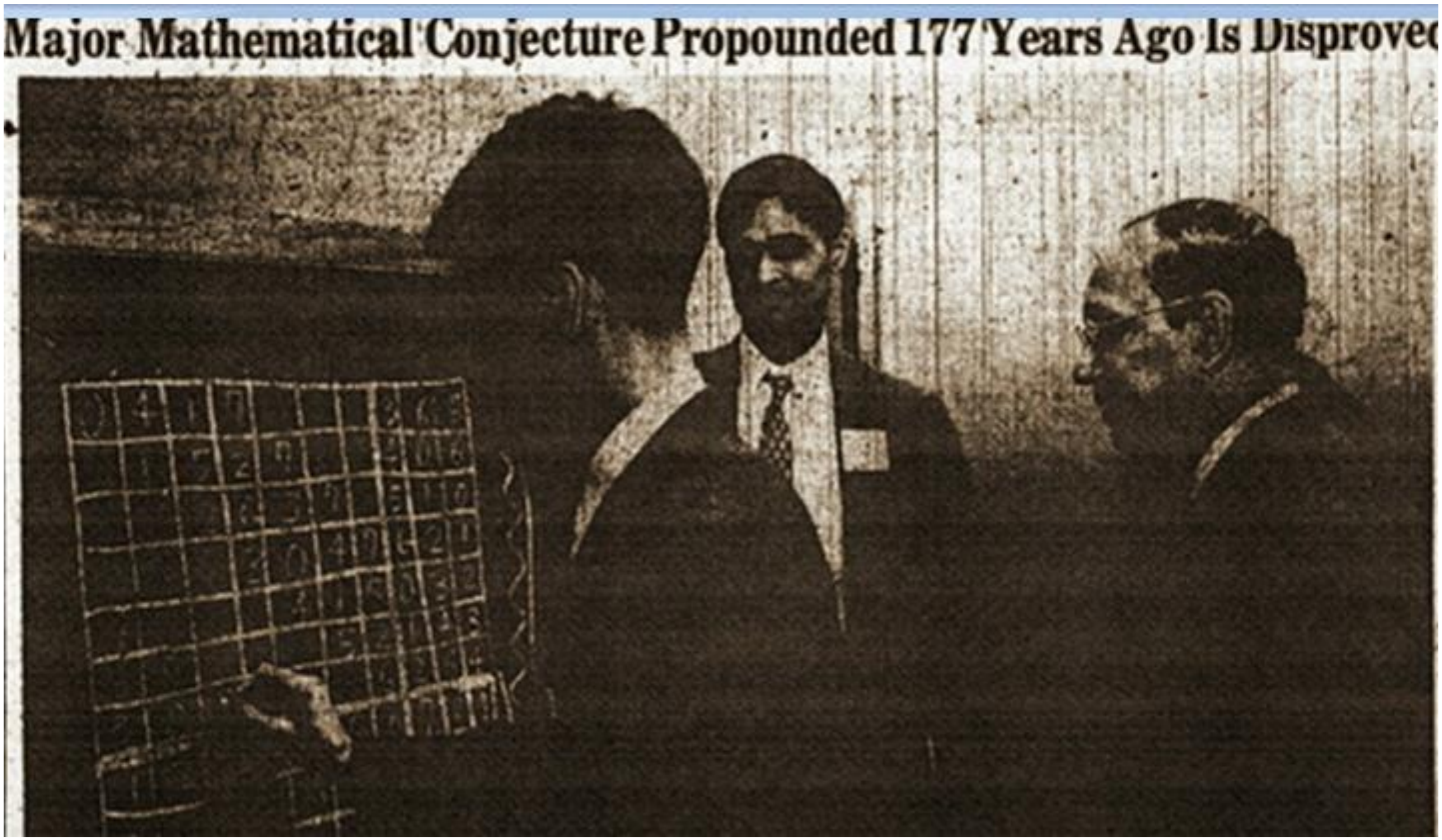
Витраж с латинским квадратом 7-го порядка в одном из колледжей Кэмбриджа, посвящённый Р.Фишеру

# Опровержение гипотезы Эйлера

- Паркер, Боуз и Шрикханде в 1959 г. построили греко-латинский квадрат порядка 10. Они конструктивно доказали, что **гипотеза Эйлера ошибочна** для всех значений $n = 4k + 2$, где $n$ больше 6. Результат Эйлера Был верен только для n=6.

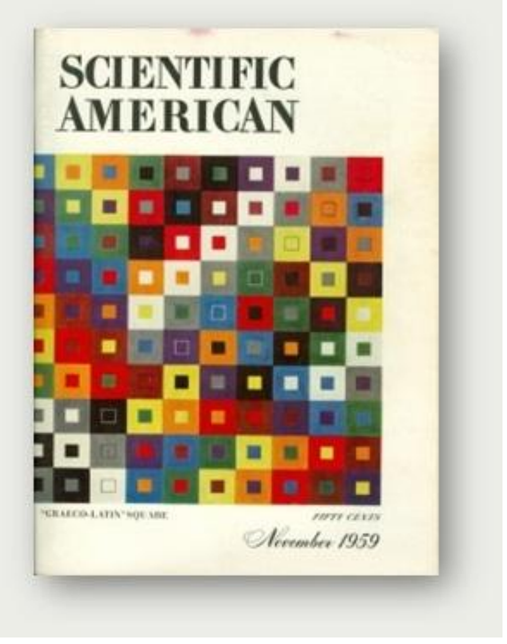
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 47 | 18 | 76 | 29 | 93 | 85 | 34 | 61 | 52 |
| 86 | 11 | 57 | 28 | 70 | 39 | 94 | 45 | 02 | 63 |
| 95 | 80 | 22 | 67 | 38 | 71 | 49 | 56 | 13 | 04 |
| 59 | 96 | 81 | 33 | 07 | 48 | 72 | 60 | 24 | 15 |
| 73 | 69 | 90 | 82 | 44 | 17 | 58 | 01 | 35 | 26 |
| 68 | 74 | 09 | 91 | 83 | 55 | 27 | 12 | 46 | 30 |
| 37 | 08 | 75 | 19 | 92 | 84 | 66 | 23 | 50 | 41 |
| 14 | 25 | 36 | 40 | 51 | 62 | 03 | 77 | 88 | 99 |
| 21 | 32 | 43 | 54 | 65 | 06 | 10 | 89 | 97 | 78 |
| 42 | 53 | 64 | 05 | 16 | 20 | 31 | 98 | 79 | 87 |

# Главная математическая гипотеза опровергнута через 177 лет



# Греко-латинский квадрат порядка 10 в красках

- На обложке журнала *Scientific American* за ноябрь 1959 года расположена фотография картины художницы журнала Эми Казаи. На картине изображён греко-латинский квадрат 10-го порядка. Десять цифр квадрата были заменены десятью различными красками, так что каждая ячейка окрашена соответствующей парой красок.



# А.И.Лямзин –пермский исследователь – опровергнул гипотезу Эйлера

- Греко-латинский квадрат А.И.Лямзина:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 12 | 23 | 34 | 45 | 56 | 67 | 78 | 89 | 91 |
| 11 | 05 | 58 | 83 | 32 | 27 | 79 | 96 | 64 | 40 |
| 22 | 50 | 06 | 69 | 94 | 43 | 38 | 81 | 17 | 75 |
| 33 | 86 | 60 | 07 | 71 | 15 | 54 | 49 | 92 | 28 |
| 44 | 39 | 97 | 70 | 08 | 82 | 26 | 65 | 51 | 13 |
| 55 | 24 | 41 | 18 | 80 | 09 | 93 | 37 | 76 | 62 |
| 66 | 73 | 35 | 52 | 29 | 90 | 01 | 14 | 48 | 87 |
| 77 | 98 | 84 | 46 | 63 | 31 | 10 | 02 | 25 | 59 |
| 88 | 61 | 19 | 95 | 57 | 74 | 42 | 20 | 03 | 36 |
| 99 | 47 | 72 | 21 | 16 | 68 | 85 | 53 | 30 | 04 |

# 8 взаимно ортогональных латинских квадратов порядка 9 доказывают существование проективной плоскости порядка 9

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 123456789 | 123456789 | 123456789 | 123456789 | 123456789 | 123456789 | 123456789 | 123456789 |
| 231564897 | 456789123 | 645978312 | 897231564 | 312645978 | 564897231 | 789123456 | 978312645 |
| 312645978 | 789123456 | 897231564 | 645978312 | 231564897 | 978312645 | 456789123 | 564897231 |
| 456789123 | 312645978 | 978312645 | 564897231 | 789123456 | 645978312 | 231564897 | 897231564 |
| 564897231 | 645978312 | 231564897 | 312645978 | 978312645 | 789123456 | 897231564 | 456789123 |
| 645978312 | 978312645 | 456789123 | 789123456 | 897231564 | 231564897 | 564897231 | 312645978 |
| 789123456 | 231564897 | 564897231 | 978312645 | 456789123 | 897231564 | 312645978 | 645978312 |
| 897231564 | 564897231 | 789123456 | 456789123 | 645978312 | 312645978 | 978312645 | 231564897 |
| 978312645 | 897231564 | 312645978 | 231564897 | 564897231 | 456789123 | 645978312 | 789123456 |

# Дж. Дж. Сильвестр, 1814-1897

*Положение, комбинация, число представляются мне тремя пересекающимися, но различными сферами мысли, к которым имеют отношение все математические идеи (1841)*

# Сильвестр – о тактике

- Раздел чистой математики, изучающий порядок, расположение элементов друг относительно друга, Сильвестр назвал *тактикой.* К этому разделу Сильвестр относил комбинаторный анализ, теорию чисел и теорию групп подстановок.
-

# А. Кэли, 1821-1895

- *Тактическая* операция связана с *расположением* множества вещей некоторым образом, *логистическая* (арифметическая) операция представляет собой вычисление для получения в результате числа. Каждая алгебраическая теорема основывается в конечном счёте на тактических основаниях. Однако нельзя абсолютно резко разделить тактические и логистические операции. Во всякой серии логистических операций есть тактический элемент, во многих тактических операциях, например, при разбиении чисел, есть кое-что логистическое. Таким образом, *Алгебра имеет два больших раздела: Тактику и Логистику (1864).*

$n_i$

# Геометрические конфигурации

Плоская геометрическая конфигурация $n_i$ состоит из $n$ точек и $n$ прямых, расположенных так, что каждая из $n$ точек инцидентна $i$ прямым и каждая из $n$ прямых инцидентна $i$ точкам.

Пространственная конфигурация $n_i$ состоит из $n$ точек и $n$ плоскостей таких, что в каждой плоскости лежит $i$ точек и через каждую точку проходит $i$ плоскостей. Если пространственной конфигурации принадлежит ещё $g$ прямых, таких, что на каждой прямой лежит $k$ точек и через каждую прямую проходит $k$ плоскостей, то такая конфигурация обозначается символом $(n_i, g_k)$.

# Проблема конфигураций

К.Т. Рейе (1882) дал определение геометрической конфигурации.

В статье "Проблема конфигураций" дал определение плоской симметричной конфигурации $n_i$ и пространственной геометрической конфигурации $n_i$. Проблему конфигураций Рейе видит в нахождении чисел $n$ и $i$, для которых существуют конфигурации, и в изучении свойств конфигураций. Заслуга Рейе состоит в том, что он впервые предпринял систематическое изучение конфигураций в проективной плоскости и обратил всеобщее внимание на этот важный раздел проективной геометрии.

# Решение З. Кантора проблемы конфигураций

З. Кантор из Праги последовательно решал проблему конфигураций. Параметр $n$ для конфигурации $n_3$ удовлетворяет неравенству $n \geq 7$. Для $n = 7$ конфигурация $7_3$ единственная, в вещественной плоскости она не реализуется. Конфигурация $8_3$ также единственная. Ещё Мёбиус в 1828 году показал, что она не реализуется в вещественной плоскости. Существует три неизоморфные конфигурации $9_3$ и десять неизоморфных конфигураций $10_3$. Все три конфигурации $9_3$ реализуются в вещественной проективной плоскости. Одна из конфигураций $9_3$ есть конфигурация Паскаля, Из десяти конфигураций $10_3$ в вещественной плоскости реализуются девять. Одна из конфигураций $10_3$ известна как конфигурация Дезарга.

# Итоги развития теории конфигураций в конце XIX – начале XX вв.

Значительный импульс исследованиям геометрических конфигураций сообщили работы А. Клебша. К моменту выхода его статей 1863 года в теории кривых и поверхностей различных порядков накопилось много разрозненных фактов, требующих для своей систематизации некоторой общей идеи. Использовав теорию функций Римана, Клебш построил общую теорию, исследовал геометрические конфигурации на плоскости.

Зимой 1920-21 гг. Давид Гильберт прочёл в Гёттингене курс "Наглядная геометрия", один из разделов которого был посвящён конфигурациям. Позднее лекции Гильберта, обработанные его учеником С. Кон-Фоссеном, были изданы отдельной книгой. В 1929 году Ф. Леви в книге "Геометрические конфигурации" подвёл итог развитию геометрических конфигураций в XIX в.

# Комбинаторная школа Гинденбурга

- Карл Фридрих Гинденбург(1741-1808) – основатель первой школы по комбинаторному анализу (с 1800 г. до первой четверти XIX в.)
- Его цель – создать универсальный язык для математических наук. И этот язык – язык комбинаторики. Комбинаторные операции будут иметь такое же применение как операции арифметики, алгебры и анализа.
- Его исследования были сосредоточены вокруг полиномиальной теоремы.

# Евгений Григорьевич Гонин
# (1910-1983)

# Жизненный путь Е.Г. Гонина

- Евгений Григорьевич получил образование в Пермском университете. Научную и педагогическую деятельность *Евгений Григорьевич Гонин* начал в 1930 г. ассистентом кафедры математики Пермского государственного педагогического института, а затем всю жизнь проработал в нём, пройдя путь от ассистента до заведующего кафедрой и руководителя аспирантуры.
- Диссертацию "Обобщение теории вещественных чисел А.Н.Колмогорова" Евгений Григорьевич защитил в 1952 г.
- С 1954 г. Е.Г. Гонин стал заведовать кафедрой алгебры и геометрии. С этого же года при кафедре открылась аспирантура под его руководством. Он стал основателем *школы конечных геометрических структур*.

# Направления научных исследований в школе Е.Г. Гонина

- С середины прошлого века ученики Е.Г. Гонина исследовали *конечные геометрии* по следующим направлениям:

I. Изучение внутренней структуры уже полученных проективных плоскостей порядка 9:

- исследование групп коллинеаций в каждой из них;
- исследование *k*-дуг, полных дуг, овалов, латинских квадратов, сетей и др.;
- исследование подплоскостей разных порядков;

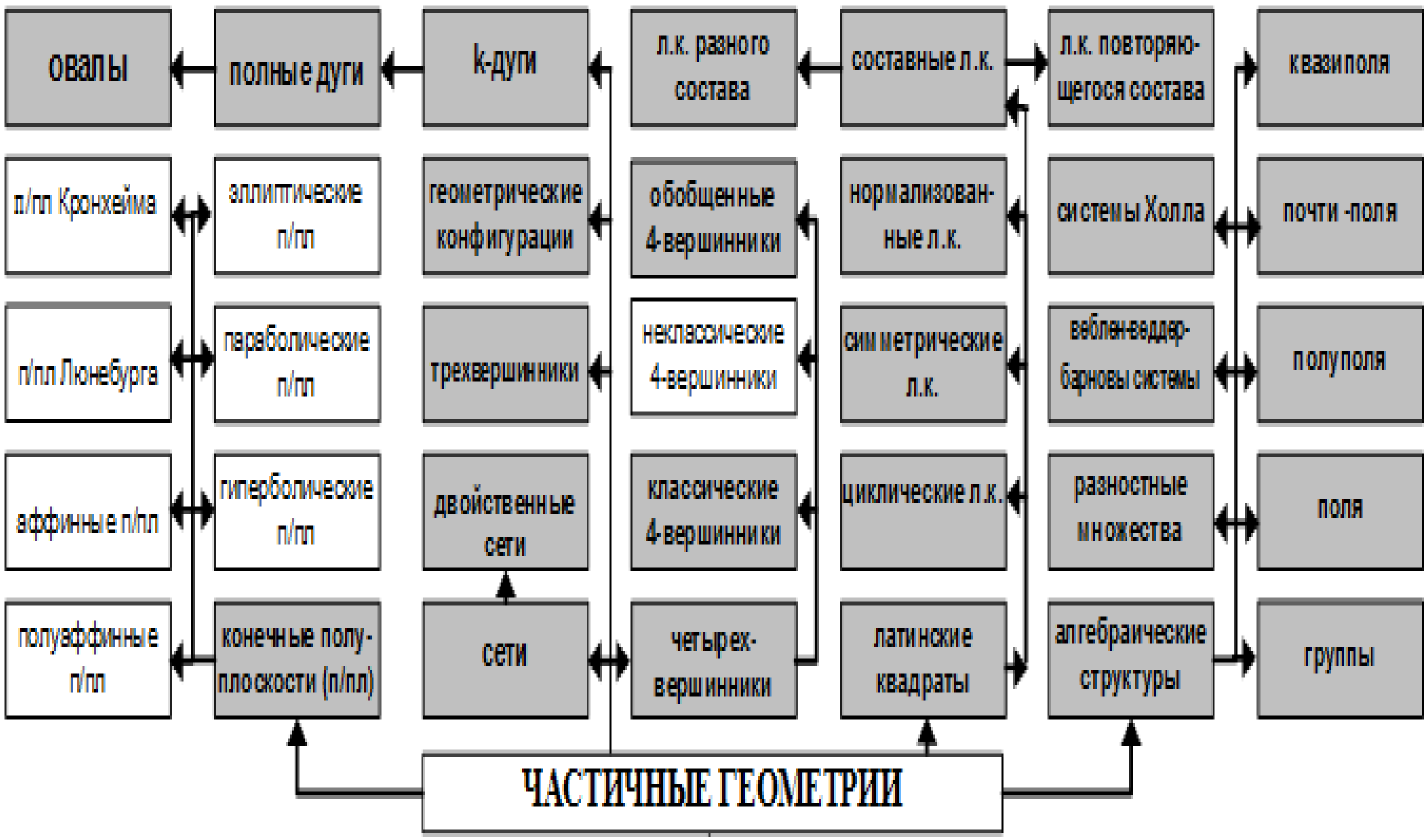
II. Исследование других видов конечных геометрий.

III. Построение проективных плоскостей порядка 9, отличных от четырех известных, с помощью *частичных геометрий*.

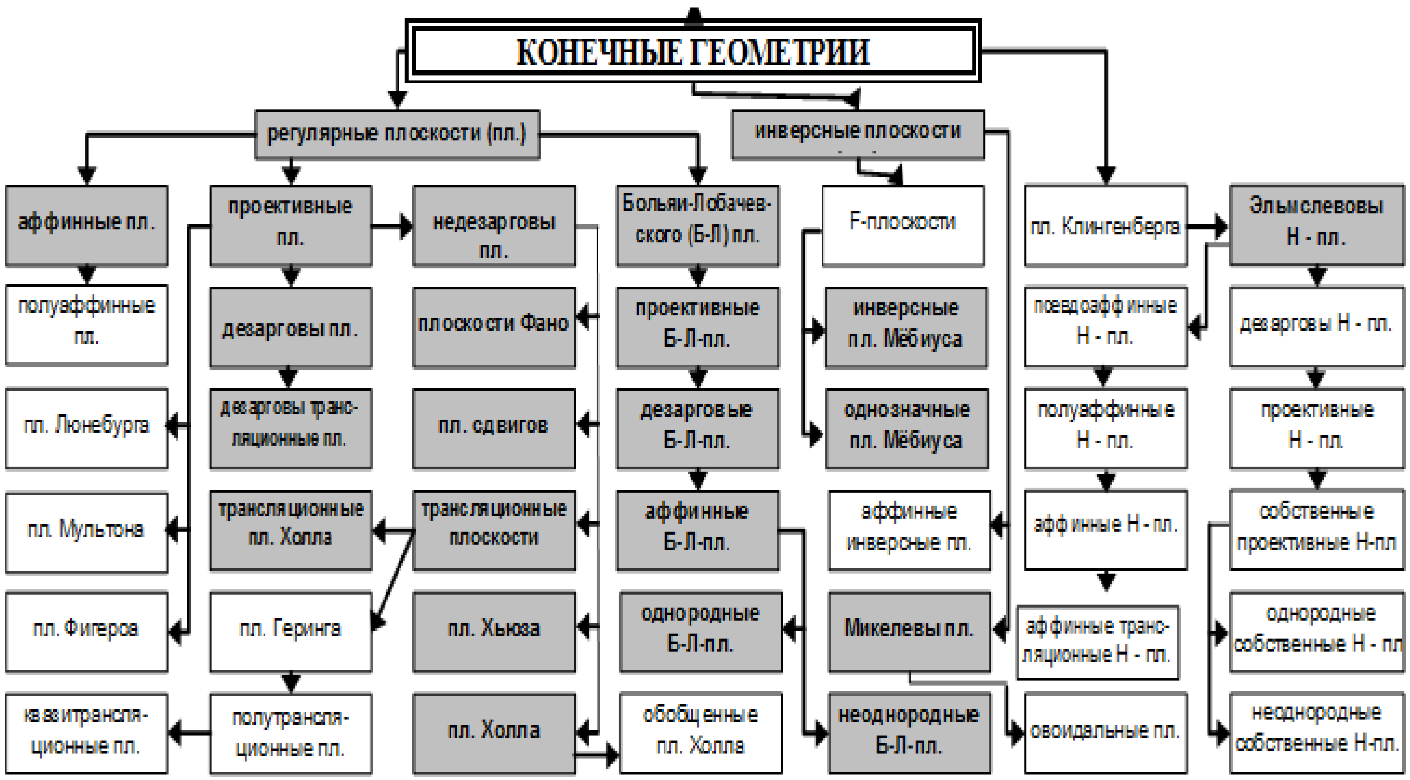
IV. Решение проблемы ортогональности латинских квадратов.

В Советском Союзе эти вопросы впервые стали изучаться в Перми.

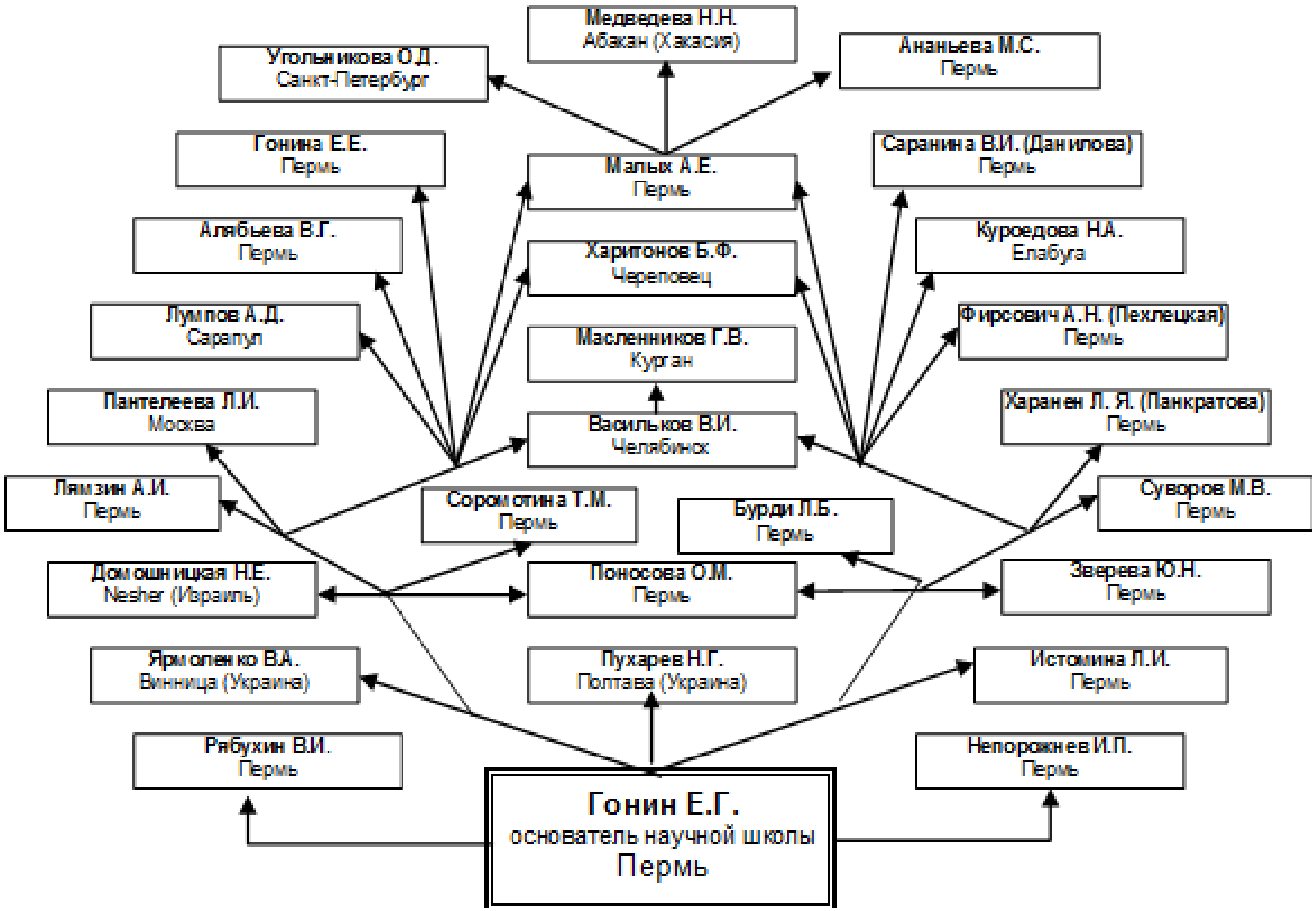
# ШКОЛА Е. Г. ГОНИНА ИССЛЕДОВАНИЯ по теме «ЧАСТИЧНЫЕ ГЕОМЕТРИИ»



# Школа Е.Г. ГОНИНА ИССЛЕДОВАНИЯ по теме «КОНЕЧНЫЕ ПЛОСКОСТИ»



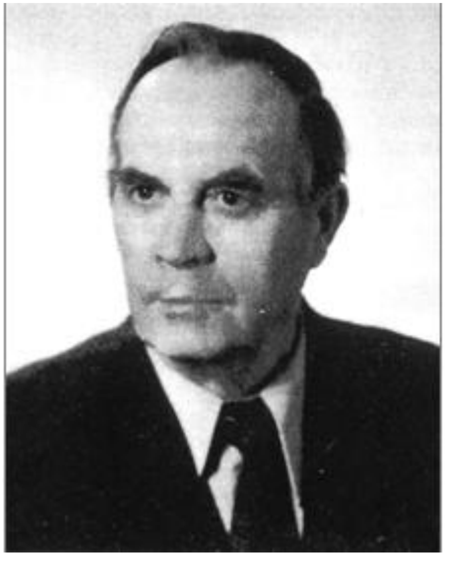
# НАУЧНАЯ ШКОЛА Е.Г. ГОНИНА



# АЛЛА ЕФИМОВНА МАЛЫХ (1939-2019)

- А.Е. Малых – самая успешная и известная ученица Е.Г. Гонина, защитила докторскую диссертацию. 16 её учеников защитили кандидатские диссертации.

# К.А. Рыбников (1913-2004) основатель московской школы комбинаторного анализа



# Сборник статей «Комбинаторный анализ» (1971-1989)