Геометрические и топологические свойства пространств, являющихся значениями некоторых ковариантных функторов

Жураев Турсунбой Файзиевич

Научный консультант: доктор физико-математических наук, академик Ш.А.Аюпов

9 января 2022 г.

ВВЕДЕНИЕ

Многолетние исследования геометрических и топологических свойств пространств привели к необходимости изучения сохранения топологических и геометрических свойств пространств при воздействие на них ковариантных функторов. Известно, что к более изученным топологическим и геометрическим свойствам относятся: метризуемость, размерность, шейповые свойства, расположенность, ретрагируемость, экстензорность, стягиваемость, вложимость, и т.п. В работе Е.В.Щепин [1] выделяя ряд естественных малоограничетельных свойств функтора, построил далеко продвинутую, очень содержательную общую теорию ковариантных функторов и определил понятия нормального функтора.

В связи с этим на Пражском международном топологическом симпозиуме 1981 года В.В.Федорчук [2] поставил следующие общие проблемы теории топологических пространств и теории ковариантных функторов:

---

[1] **Щепин Е.В.** Функторы и несчетные степени компактов Успехи матем.наук.Москва, 1981.Т.36. №3. с.3-62

[2] **Федорчук В.В.** О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов Успехи матем. наук. Москва, 1984. Т.39. Вып.3. С 169-208

ВВЕДЕНИЕ

(А) Какие ковариантные функторы в категории топологических пространств сохраняют свойство быть $A(N)R$-пространством?

(Б) Как ведут себя те или иные геометрические свойства топологических пространств при воздействии на них различными ковариантными функторами?

(В) Как ведут себя те или иные свойства отображений при воздействии на них различными ковариантными функторами?

(Г) Как ведут себя геометрические или топологические свойства пространства и отображений при переходе от пространства $F(X)$ и отображения $F(f)$к пространству X и отображению f соответственно (здесь F-ковариантный функтор)? В частности, пусть $\mathscr{P}$-некоторое геометрическое или топологическое свойство.Для каких функторов из того, что $F(X)$ (соответственно $F(f)$) обладает свойством $\mathscr{P}$, вытекает, что X (соответственно f) обладает этим свойством? Или наоборот, каковы геометрические свойства пространств и отображений, которые для данного функтора F переходят от $F(X)$ и $F(f)$ к X и f соответственно?

ВВЕДЕНИЕ

(Д) Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы топологическое пространство было гомеоморфно метрическому пространству.

Первые метризационные теоремы были доказаны основателями московской топологической школы П.С.Александровым, П.С.Урысоном и Ю.М.Смирновом.

К основным и наиболее геометричным топологическим инвариантам, изучаемым общей топологией, относится размерность топологического пространства, обобщающая элементарно - геометрическое понятие числа измерений геометрических фигур.

(Е) В исследовании теории размерности одной из центральных проблемы является размерность произведения конечного числа конечномерных топологических пространств в категории Top т.е. выполняется ли следующее неравенство, называемое логарифмическим законом для размерности dim:

$$\dim \prod_{i=1}^{n} X_i \leq \sum_{i=1}^{n} \dim X_i \ (*)$$

Предварительные сведение

Настоящая диссертационная работа в связи с вышеизложенными проблемами, посвящена, в частности, исследованию следующего вопроса:

(Ж) Определить класс ковариантных функторов в категории $Tych$, сохраняющих класс некоторых топологических пространств, класс конечномерных и слабосчетномерных пространств.

Используемая в работе терминология и обозначения стандартны и следует монографиям. [3] [4] [5] [6] [7]

Для пространства X через id_X обозначим тождественное отображение пространства X на себя. Через K обозначаем некоторый класс пространств. Будем говорить, что функтор F сохраняет класс K, если из принадлежности пространства X классу K, следует принадлежность пространства $F(X)$ классу K.

[3] **Александров П.С., Пасынков Б.А.** Введение в теорию размерности. Москва: Наука, 1973. с.575.

[4] **Богатый С.А., Федорчук В.В.** Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, 1986. Т.25. с. 195-270.

[5] **Борсук К.** Теория ретрактов. Москва: Наука, 1971.246 с.

[6] **Борсук К.** Теория шейпов. Москва: Мир, 1976. 117 с.

[7] **Федорчук В.В., Филиппов В.В.** Общая топология. Основные конструкции. Москва: Изд-во МГУ, 1988. с. 252.

Для ответа на вопрос (E) для размерности dim в различных категориях *Top* ранее были получены следующие результаты:

Теорема.

Логарифмический закон имеет место в следующих категориях:
а) В категории *Comp* [a]
б) В категории метрических пространств [b], [c]
в) В категории паракомпактных $\sum$ −пространств [d]
г) В категории паракомпактных p- пространств [e]

[a] **Hemmingsen E.** Some theorems on dimension theory of normal Hausdorf spaces. Duke Moth.J,13,1946, 495-504.

[b] **Катетов М.** О размерности метрических пространств Доклады АН СССР. Москва, 1951. Т.79. №2. С 189-191.

[c] **Morita K.** Normal families and dimension theory in metric spaces Math. Ann., 128, 1954. №4. p.p. 350-362.

[d] **Пасынков Б.А.** О размерности прямоугольных произведений Доклады АН СССР. Москва, 1975. Т.221. - №2. С 291-294.

[e] **Филиппов В.В.** О нормально расположенных пространствах. Труды Мат. ин-та АН СССР. Москва, 1983. Т.154. С 239-251.

Для размерности dim равенство $dimX \times Y = dimX + dimY$ не имеет место:
1. Понтрягин (1930) построил пример: $X \hookrightarrow R^4$, $Y \hookrightarrow R^4, X, Y$-компакт $dimX = dimY = 2$, $dimX \times Y = 3$
2. Болтянский (1948), построил такой компакт P, $dimP = 2$, что $dimP^2 = 3$.

Определение (Александров, 1932).

Компакт X называется размерно полноценным, если для произвольного компакта Y имеет место равенство: $dimX \times Y = dimX + dimY$.
(Нульмерные, одномерные и полиэдры-размерно полноценны)

Первая глава «Размерность произведения некоторых топологических пространств», посвящена решению проблемы (E) для размерности dim конечного произведения в категории паракомпактных σ-пространств, стратифицируемых пространств, паракомпактных Муровских пространств, паракомпактных пространств Нагаты и паракомпактных MN-пространств.

Определение 1.

Топологическое пространство называется паракомпактным, если во всякое открытое покрытие Ω этого пространства можно вписать открытое покрытие ω, являющееся локально-конечным.

Пространство, имеющие $\sigma-$локально-конечную сеть называется $\sigma-$пространством.

Определение 2.

Для любого топологического пространства X и натурального числа n полагаем $\dim X \leq n$, если в любое конечное открытое покрытие Ω пространства X можно вписать конечное открытое покрытие ω кратности $\leq n+1$. (Напомним, что кратностью системы (покрытия) Ω пространства X в данной точки $x \in X$, коротко $Kp_x\Omega$, называется мощность множества Ω всех элементов системы (покрытия) Ω, содержащих точку x т.е. $Kp_x\Omega = \mid \{\alpha \in A : x \in A_\alpha, A_\alpha \in \omega\} \mid$. Кратностью покрытия называется число $sup\{Kp_x\Omega : x \in X\}$ т.е. $Kp\omega = sup\{Kp_x\omega : x \in \omega\}$).

Приведем некоторые полученные нами результаты:

Теорема 1.1.18.

В категории паракомпактных $\sigma-$пространств верно неравенство: $\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y$.

Определение 3.

Топологическое T_1-пространство X называется стратифицируемым (или кружевным) пространством (коротко, $St-$пространством), если каждому открытому множеству $U \subset X$ можно сопоставить последовательность $\{U_n : n \in N\}$ открытых подмножеств таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:
а) $\overline{U}_n \subset U$ для каждого $n \in N$; б) $\bigcup\{U_n : n \in N\} = U$; в) если $U \subset V$, то $U_n \subset V_n$ для всех n. Семейство $\{U_n\}$ называется стратификацией (кружевом) пространства X.

Доказано что утверждение теоремы 1.1.18 верно для размерности dim конечного произведения в категории стратифицируемых пространств, муровских[8] пространств, паракомпактных пространств Нагаты[8] и паракомпактных MN-пространств[9].(Определение таких пространств в работах [8,9]).

[8] **Энгелькинг Р.** Общая топология. Москва: Мир, 1986. с. 752.

[9] **Ceder J.G.** Some generalizations of metric spaces Pacific J.Math., 11, 1961. p.p. 105-126.

Во **второй главе** диссертации «Метризуемость компактов ковариантные функторы с конечными носителями» рассматривается вопрос (проблема (Д)) метризуемости различного класса компактов при воздействии на них определенного класса ковариантных функторов с конечной степенью.

В этой главе установлено свойства метризуемости топологического пространства вида $F(X)$, где $F-$ некоторый ковариантный функтор.

Определение 4.

Пусть X некоторый компакт, F-функтор и $x \in F(X)$. Степенью точки x (обозначается $deg(x)$) называется такое наименьшее натуральное число n, что x принадлежит образу $F(f)$ некоторого отображения $f : K \to X$ $n-$точечного пространства K. Если такое конечное n не существует, то степень x считается бесконечной. Степенью функтора F называется максимум степеней всевозможных точек $x \in F(X)$ для всевозможных компактов X и обозначается $degF(X)$

Определение 5.

Для функтора F, сохраняющего пересечения, определен носитель $supp_F(a)$ элемента $a \in F(X)$, это пересечение всех замкнутых множеств $A \subset X$, таких, что $a \in F(A)$. т.е. $supp_F(a) = \bigcap\{A : a \in F(A), A$ замкнуто в $X\}$.

Целым неотрицательным числом k обозначим дискретное пространство, состоящее из k точек (если $k = 0$, то будем считать, что k гомеоморфно $\varnothing$). Через $C(k, X)$ обозначается пространство непрерывных отображений из k в Y в компактно-открытой топологии. Для функтора F, компакта X и целого неотрицательного числа k определим отображение

$$\pi_{F,X,k} : C(\{k\}, X) \times F(\{k\}) \to F(X)$$

равенством

$$\pi_{F,X,k}(\xi, a) = F(\xi)(a), \text{ где } \xi \in C(\{k\}, X), a \in F(\{k\}).$$

Поскольку функтор F непрерывен, то отображение $\pi_{F,X,k}$ также непрерывно[10].

[10] **Щепин Е.В.** Функторы и несчетные степени компактов Успехи матем.наук.Москва, 1981.Т.36. №3. с.3-62

Определим подфунктор F_k функтора F следующим образом: для компакта X пространство $F_k(X)$ есть образ пространства $C(\{k\}, X) \times F(\{k\})$ при отображении $\pi_{F,X,k}$ и для отображения $f : X \to Y$ отображение $F_k(f)$ есть сужение $F(f)$ на $F_k(X)$.

А.Ч.Чигогидзе [11] предложил один способ продолжения всякого мономорфного, сохраняющего пересечения функтора $F : Comp \to Comp$, на категорию $Tych$ тихоновских пространств следующим образом: для тихоновского пространства X полагается $F_\beta(X) = \{a \in F(\beta X) : supp(a) \subset X\}$.

Известно, что переход к функтору F_β сохраняет все свойства нормальности. Мы будем обозначать одной и той же буквой F как функтор $F : Comp \to Comp$, так и его продолжение $F_\beta : Tych \to Tych$ на категорию тихоновских пространств.

В этом направлений ранее получены следующие результаты:

Теорема.

Если куб X^3 компакта X наследственно нормален, то компакт X метризуем.[a]

[a] **Katetov M.** Complete normality of Cartesian products Fund. Math., 1948. 36, p.p.271-274.

[11] **Чигогидзе А.Ч.** Продолжение нормальных функторов Вестник МГУ. Сер. мех.-мат. Москва, 1984. №6. С 23-26.

Теорема.

Если для компакта X его гиперсимметрическая степень $exp_3 X$ наследственно нормальна, то X метризуем.[a]

[a] **Федорчук В.В.** К теореме Катетова о кубе Вестник МГУ. Сер. мех.-мат. Москва, 1989. №4. С 93-96.

Теорема.

Если для какого-нибудь нормального функтора F степени ≥ 3 компакт $F(X)$ наследственно нормален, то компакт X метризуем. [a]

[a] **Федорчук В.В.** К теореме Катетова о кубе Вестник МГУ. Сер. мех.-мат. Москва, 1989. №4. С 93-96.

Определение 6.

топологическое пространство называется счетно паракомпактным, если в каждое его счетное открытое покрытие можно вписать локально-конечное открытое покрытие.

Понятия функтора суперрасширения λ и его подфункторов λ_n введены и исследованы в работах.[12] [13]

Приведем некоторые полученные нами результаты:

Теорема 2.2.9.

Пусть $X-$компакт и $n \geq 4$. Если пространство $\lambda_n(X)\backslash X$ наследственно нормально, то компакт X метризуем.[a]

[a] **Жураев Т.Ф.** Функтор и метризуемость бикомпактов. // Вестник МГУ. Сер. мех.-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 1999г. №4. С 54-56. (3.Scopus. IF=0.314)

Теорема 2.2.12.

Пусть X-компакт и $n \geq 4$. Если пространство $\lambda_n(X)\backslash X$ наследственно счетно паракомпактно, то компакт X метризуем. [a]

[a] **Жураев Т.Ф.** Функтор и метризуемость бикомпактов. // Вестник МГУ. Сер. мех.-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 1999г. №4. С 54-56. (3.Scopus. IF=0.314)

[12] **J.de Groot.** Superextensions and supercompactness. In: Proc. I. Intern. Sump. of extension theory of topological structures and its applications. - Berlin: VEB Deutseler Verlag Wiss. 1969. p.p. 89-90.

[13] **Иванов А.В.** О пространстве полных сцепленных систем. Сибир. Матем. журнал, 1986, 27, №6, 95-110.

Теорема 2.2.13.

Если для компакта X пространство $\lambda_n(X)(n \geq 3)$ наследственно нормально, то он метризуем[a].

[a] **Жураев Т.Ф.** Функтор иметризуемость бикомпактов. // Вестник МГУ. Сер. мех.-мат. (Moscow University Mathematics Bulletin). 1999 г. №4. С 54-56. (3.Scopus. IF=0.314)

Теорема 2.3.4.

Если для компакта X его подпространство гиперсимметрической степени 3 $\exp_3^* X$ наследственно нормально, то X метризуем. где, $\exp_3^* X = \exp_3(X) \setminus \exp_1 X$.[a]

[a] **Жураев Т.Ф.** Функтор иметризуемость бикомпактов. // Вестник МГУ. Сер. мех-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 1999 г. №4. С 54-56. (3.Scopus. IF=0.314)

Теорема 2.3.8.

Если для какого-нибудь компакта и нормального функтора F степени ≥ 3 пространство $F^*(X)$ наследственно нормально, то компакт X метризуем, где, $F^*(X) = F(X) \backslash \eta_F(X)$ [a].
Напомним, что для пространства X и функтора F через $\eta_F : X \hookrightarrow F(X)$ обозначается естественное преобразование (вложения) [b].

[a] **Жураев Т.Ф.** Функтор и метризуемость бикомпактов. // Вестник МГУ. Сер. мех.-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 1999 г. №4. С 54-56. (3.Scopus. IF=0.314)

[b] **Федорчук В.В.** Мягкие отображения, многозначные ретракции и функторы Успехи матем. наук. Москва, 1986. Т.41. Вып. 6. с. 121-159.

Теорема 2.3.1.

Если для какого-нибудь нормального функтора F степени ≥ 3 и компакта X пространство $F^*(X)$ наследственно счетно- паракомпактно, то компакт Xметризуем. [a]

[a] **Жураев Т.Ф.** Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов Вестник МГУ. Сер. мех-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 2000г. №4. С 8-11. (3.Scopus. IF=0.314).

Теорема 2.3.16.

Если для какого-нибудь нормального функтора F степени ≥ 3 и хаусдорфова счетно-компактного пространство X, пространство $F(X)$ наследственно нормально, то X- метризуемый компакт.[a]

Напомним, топологическое пространство X называется счетно-компактным, если из каждого счетного открытого покрытия пространства X можно выбрать конечное подпокрытие.

[a] **Жураев Т.Ф.** Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов Вестник МГУ. Сер. мех-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 2000г. №4. С 8-11. (3.Scopus. IF=0.314).

Следствие 2.3.21.

Если для бикомпакта X пространство $X^n \backslash \Delta$ наследственно нормально, то Xметризуем (где $n \geq 3$), где $\triangle$ диагональ X^n. [a]

[a] **Жураев Т.Ф.** Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов Вестник МГУ. Сер. мех-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 2000г. №4. С 8-11. (3.Scopus. IF=0.314).

В **третьей главе** «Геометрические и топологические свойства пространства $P(X)$ вероятностных мер и его подпространств» даны решение задач (А)-(Г) для функтора P вероятностных мер и его подфункторов.

Нам нужны следующие понятие и обозначения: напомним, что топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y или Y-многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

$Q = \prod_{i=1}^{\infty}[-1,1]_i$–гильбертов куб, где $[-1,1]_i$–отрезок на прямой R, $W_i^{\pm} = \{(g_i) \in Q : g_i = \pm 1\}$ – i–ая грань куба Q, $BdQ = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$–псевдограница куба Q, а $S = Q \backslash BdQ$–псевдовнутренность куба Q. ℓ_2-сепарабельное гильбертово пространство, $Q' = \prod_{i=1}^{\infty}[-1, \frac{1}{2i}]$–гильбертов кирпич; $\sum$-линейная оболочка стандартного кирпича Q' в гильбертовам пространстве ℓ_2, $rintQ = \{x = (x_n) \in Q : |x_n| < t < 1, n \in N\}$, Q^f–подпространство гильбертова куба Q, состоящее из всех точек лишь конечное число координат которых отлично от нуля.

Топологические и геометрические свойства функтора $P : Comp \to Comp$ и его подфунктора P_n конечными n носителями приведено в работе [14]. Они являются нормальными функторами.

Определение 7.

Замкнутое подмножество A пространств X называется Z-множеством в X, если X можно сдвинуть в $X \setminus A$ посредством отображении, сколь угодно близкого к тождественному. Плотное $\sigma - Z-$множество B в Q называется граничным множеством в Q, если $Q \setminus B \approx l_2$. [a]

[a] **Anderson R.D.** On topological infinite deficiency. Mich. Math.J., 1967.V.14. p.p. 365-383.

Определение 8.

Пусть X и Y топологические пространства,говорят, что пара (X, A) гомеоморфна паре (Y, B), если гомеоморфизм $f : A \to B$ продолжается до гомоморфизма $\widetilde{f} : X \to Y$, где $A \subset X$ и $B \subset Y$.

[14] **Федорчук В.В.** Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия Успехи матем. наук. Москва, 1981. Т.36. Вып.3. С 177-195.

Е.В.Щепин определил подфунктор P_f функтора P вероятностных мер, обладающий следующим свойством: если носитель меры μ состоит из n точек $x_1, x_2, ..., x_n$, то мера, по крайней мере, одной из этих точек, не меньше $1 - \frac{1}{n}$. Он интересен тем, что является функтором с конечным носителем и не имеет конечной степени. Функтор $P_f : Comp \to Comp$ удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на нормальные функторы. Из определения пространства $P_f(X)$ следует, что пространство $\delta(X)$ мер Дирака лежит в $P_f(X)$. [15].

Пусть F-замкнутое множество пространства X. Непрерывное отображение $r : X \to F$ называется ретракцией, если $r(x)=x$ для всякой точки $x \in F$. Множество F называется при этом ретрактом.

Говорят, что топологическое пространство Y является абсолютным (окрестностным) ретрактом в классе K, (обозначается $Y \in A(N)R(K)$) если $Y \in K$ для всякого гомоморфизма h, отображающего Y на замкнутое подмножество $h(Y)$ пространства X из класса K, множество $h(Y)$ является ретрактом (окрестностным) пространства X.

Говорят, что пространство X является слабосчетномерным, если X является счетным объединением своих замкнутых конечномерных подпространств, т.е. $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \dim X_i < \infty, X_i -$замкнуто в .

[15] **Федорчук В.В.** Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q-многообразия Успехи матем. наук. Москва, 1981. Т.36. Вып.3. С 177-195.

Отметим, что в работах[16] [17] Кертиса и Нгуэна показано, что для отрезка $I = [0,1]$ гиперпространство $exp\, I$ гомеоморфно гильбертовому кубу Q, и гиперпространство всех конечных подмножеств $exp_\omega\, I$ пространства $exp\, I$ является граничным множеством в $exp\, I$, и $exp_\omega\, I$ гомеоморфно $\aleph_0$-мерному линейному метрическому пространству.

Наряду с линейными функционалами, определенными на топологических пространствах, интенсивно исследуются топологические свойства нелинейных функционалов, обладающих различными специфическими свойствами. В работах Ш.А. Аюпова, А. А. Заитова[18] [19] [20] впервые были введены и содержательно исследованы O_R- функтор радоновых слабо аддитивных и O_τ - функтор τ- гладких слабо аддитивных функционалов категории $Tych$- тихоновских пространств и непрерывных отображений в себя. А также изучены интересные некоторые категориальные, топологические и функториальные свойства этих O_R и O_τ- функторов.

[16] **Curtis D., Nguyen To Nhu.** Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to -dimensional linear metric spaces Top. Appl., 1985. V.19. №3. p.p. 251-260.

[17] **Curtis D.W.** Hyperspaces of finite subsets as boundary sets Top. Appl., 1986. V.22. №1. p.p. 97-107.

[18] **Аюпов Ш.А., Заитов А.А.** Слабо аддитивные функционалы на линейных пространства. ДАН РУз.2006, №4-5, стр. 7-12.

[19] **Аюпов Ш.А., Заитов А.А.** Функтор слабо аддитивных τ-гладких функционалов и отображения. Укр. Мат. Журнал Киев, 2009 т.61 №9 стр. 1167-1173.

[20] **Ayupov Sh.A., Zaitov A.A.** On the weigh and density of the spaces of order-preserving functionals. Arxiv.math: 0710,5020, V.1 2007.

В исследовании[21] Р.Б. Бешимова содержательно изучены кардинальные инварианты топологических пространств и топологические, функториальные свойства пространств типа плотности, слабой плотности, калибра, число Шанина.

А.А.Заитов[22] рассматривал геометрические свойства и содержательно привел топологические и функториальные свойства функторов O_R и O_τ в категории $Tych$- тихоновских пространств. А также дал категориальное описание этих функторов.

Теорема.

Пусть $C-$ бесконечномерное пространство, являющееся счетным объединением конечномерных компактов такое, что C выпукло, $C \in AR$ и $\bar{C} \in AR$. Тогда, если $\bar{C}$-компакт, то $(\bar{C}, C) \approx (Q, Q^f)$. [a]

[a]**Dobrovolski T.** The compact Z-property in convex sets Top. Appl., 1986. V.23. є 2. p.p. 163-172.

[21]**Бешимов Р.Б.** Некоторые кардинальные инварианты и ковариантные функторы в категориях топологических пространств. Докт. Дисс. НУУз, Ташкент , 2007.
[22]**Zaitov A.A.** Some catigorical properties of functors and weakly additive functionals. Math. Notes, 2006, Vol 79, №5, pp.632-642.

Предложение 3.1.18.

Пусть K-выпуклый компакт, лежащий в полном метрическом локально выпуклом пространстве, а $C \subset K$-всюду плотное в K выпуклое $\sigma - Z-$множество, содержащее гильбертов куб. тогда пара (K, C) гомеоморфна паре (Q, BdQ). [a]

[a] **Федорчук В.В.** Вероятностные меры в топологии Успехи матем. наук. Москва, 1991. Т.46. Вып.1 (277). С.41-80.

Отметим некоторые основные результаты третьей главы:

Теорема 3.1.14.

Пусть X- бесконечный компакт, а $A_1 \subset A_2 \subset ...-$ замкнутые подмножества в X, такие, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ всюду плотно в X и $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq X$. Тогда имеет место гомеоморфизм $(P(X), \bigcup_{i=1}^{\infty} P(A_i)) \approx (Q,\ B(Q))$.

Теорема 3.1.19.

Для произвольного бесконечного компакта X и любого открытого всюду плотного подмножества A, отличного от X, имеет место гомеоморфизм: $(P(X), P(A)) \approx (Q, B(Q))$.

Теорема 3.1.35.

Для произвольного бесконечного конечномерного компакта пара $(P(X), P_\omega(A))$ гомеоморфна паре $\left(Q, Q^f\right)$.

Теорема 3.1.45.

Пусть X такой бесконечный компакт, что $P_\omega(X)$ содержит множество, гомеоморфное гильбертовому кубу Q. Тогда $(P(X), P_\omega(X)) \approx (Q, BdQ)$

Теорема 3.1.49.

Для произвольного бесконечного компакта X имеет место гомеоморфизм: $(P(X), P_\omega(X)) \approx (Q, B(Q))$

Теорема 3.2.9.

Функтор P_f сохраняет $A(N)R$-компакты.

Теорема 3.2.23.

Пусть X- бесконечный компакт, $A-$произвольное открытое (незамкнутое) всюду плотное подмножество. Тогда пара $(P(X), P_\omega(A))$ гомеоморфна паре $(Q, B\left(Q\right))$.

Четвертая глава диссертации «Размерностные, экстензорные и шейповые свойства топологических пространств, являющиеся значениями некоторых ковариантных функторов» посвящена изучению размерностных, экстензорных и шейповых свойств, категорий конечномерных или слабосчетномерных компактов, конечномерных паракомпактных σ-пространств, стратифицируемых пространств, являющихся значениями ковариантных функторов P_n, $P_{f,n}$, P_f и F, где $F-$локально выпуклые подфункторы функтора P_n.

Определение 9.

Нормальный подфунктор F функтора P_n называется локально выпуклым, если подпространства $F(n)$ симплекса $P_n(n)$ локально выпукло. [a]

[a] **Федорчук В.В.** О некоторых геометрических свойствах ковариантных функторов Успехи матем. наук. Москва, 1984. Т.39. Вып.3. С 169-208.

Шейповым отображением компакта A в компакт B называется такая последовательность отображений $f_n : Q \to Q$, что для любой окрестности V компакта B найдется окрестность U компакта A и натуральное число N такие, что при $n \geq N$ $f_n(U) \subset V$ и $f_n|_u \simeq f_{n+1}$ (по V) т.е. отображения $f_n|_u$ и $f_{n+1}|_u$ гомотопны как отображения в пространств V. Обозначается $f = \{f_{\,n}, A, B\} : A \to B$. Шейповое отображения $f : A \to B$ называется шейповой эквивалентностью, если существует такое отображение $g : B \to A$, что $fg \simeq id_B$ и $gf \simeq id_B$.

Отношение шейповой эквивалентности, является отношением эквивалентности. Шейп, содержащий пространство X, будем называть шейпом пространства X обозначать через ShX.[23]

В работе [24] Т.Чепмэна имеется следующая:

Теорема 4.2.2.[24]

Пусть замкнутые подмножества A и B есть Z-множества в Q. $Sh(A) = Sh(B)$, тогда и только тогда, когда $Q \backslash A \approx Q \backslash B$.

---

[23] **Борсук К.** Теория шейпов. Москва: «Мир», 1976. 117 с.

[24] **Чепмэн Т.** Лекции о -многообразиях. Москва: «Мир», 1981.с.170

Приведем следующие полученные нами основные результаты:

Теорема 4.2.3.

Для любых бесконечных компактов X и Y имеет место: $shX = shY$, тогда и только тогда, когда $P(X) \backslash P_f(X) \approx P(Y) \backslash P_f(Y)$.

Теорема 4.1.2.

Пусть $F-$мономорфный, сохраняющий конечные пересечения и пустое множество подфунктор функтора P вероятностных мер степени n, причем $F(n)$-паракомпактное σ-пространство и $\dim F(n) < \infty$. Тогда F сохраняет конечномерные паракомпактные σ-пространства. Более того, имеет место неравенство $\dim F(X) \leq n \dim X + \dim F(n)$.

Теорема 4.1.15.

Пусть X конечномерное St- пространство. Тогда $P_n(X)$конечномерное St - пространство. Более того, верно неравенство

$$\dim P_n(X) \leq \dim X^n \times n - 1 \leq n \dim X + n - 1.$$

Теорема 4.1.18

Если X- слабо счетномерное St - пространство, то пространство $P_\omega(X)$ тоже слабосчетномерно.

Теорема 4.2.15

Пусть $X-$ выпуклый бесконечномерный компакт, а Y_i -растущая последовательность его выпуклых бесконечномерных подкомпактов, такая, что 1) Y_i есть Z-множество в $Y_{i+\ell}$; 2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ всюду плотно в X. Тогда пара $(X, \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i)$гомеоморфна паре $(Q, rintQ)$.

Теорема 4.3.27

Пусть $f : X \to Y-$ открытое отображение между конечномерными компактами X и Y с бесконечными слоями $f^{-1}(y)$. Тогда отображение $P_\omega(f) : P_\omega(X) \to P_\omega(Y)$ является $B(Q)$-расслоением.

Глава 5. Основные результаты

В **пятой главе** диссертации «Геометрические и топологические свойства пространств, являющихся значениями проективно факторных функторов» определяется новый класс конечно-открытых, проективно открытых, проективно индуктивно замкнутых, проективно факторных и проективно $\sigma - p.i.c.$ ковариантных функторов. Дано функториальное описание этих функторов и изучены топологические, геометрические свойства пространств, являющиеся значениями этого класса ковариантных функторов в категориях паракомпактных $\sum -$пространств, паракомпактных p-пространств, паракомпактных $\sigma -$пространств, стратифицируемых пространств и метризуемых пространств.

Функтор F назовем конечно-открытым, если для натурального числа k множество $F_k(k+1)$ открыто в $F(\{k+1\})$. Примерами конечно-открытых функторов являются финитные функторы, т.е. функторы F, для которых множество $F(\{k\})$ конечно для всякого натурального числа k. Функтор F назовем проективно факторным, если для всякого тихоновского пространства X и всякого натурального числа k отображение $\pi_{F,X,k} : C(\{k\}, X) \times F(\{k\}) \to F_k(X)$– факторно.

Определение 10.

Эпиморфизм $f : X \to Y$ называется индуктивно замкнутым, если существует такое замкнутое подмножество A пространства X такое, что $f(A)=Y$ и ограничение $f|_A$ есть замкнутое отображение.

Определение 11.

Функтор F_β называется проективно индуктивно замкнутым (коротко-$p.i.c.$), если отображение $\pi_{F_\beta,X,k}$ индуктивно замкнуто для каждого тихоновского пространства X и положительно целого числа k.

Определение 12.

Функтор $F : Tych \to Tych$ называется компактным ($\sigma-$компактным), если $F(K)$ компактен ($\sigma-$компактным) для любого пространства $X \in Comp$.

Пусть $F : Tych \to Tych$- функтор и $F^n \subset_{cl} F, n \in \omega$. Мы говорим, что F есть объединение F^n (обозначается, $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n$), если $F(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n(X)$ для любого тихоновского пространства X.

Определение 13.

Функтор $F : Tych \to Tych$ называется функтором $\sigma-p.i.c.$-, если $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} (F^n)_\beta$, где каждый F^n является p.i.c-функтором конечной степени.

Функтор $\exp_\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \exp_n$ является σ-p.i.c.функтором.

Теорема 5.1.7.

Всякий непрерывный сохраняющий пустое множество и прообразы, конечно-открытый функтор $F : Comp \to Comp$ является проективно факторным.

-Всякий непрерывный, сохраняющий пустое множество и прообразы, финитный функтор $F : Comp \to Comp$ является проективно факторным.

-Всякий нормальный финитный функтор, в частности, функтор гиперпространства exp, является проективно факторным.

-Для того, чтобы нормальный под функтор F функтора был проективно факторным, необходимо и достаточно, чтобы функтор F был конечно открыт.

-Никакой конечно невырожденный, конечно открытый, непрерывный функтор F, сохраняющий прообразы и точку, не является проективно открытым.

Теорема 5.1.16.

Никакой непрерывный, сохраняющий прообразы функтор F с непрерывными носителями не является проективно замкнутым.

Теорема 5.2.20.

Каждый непрерывный, мономорфный, конечно открытый, сохраняющий пустое множество, пересечения и прообразы функтор $F_\beta : Comp \to Comp$ является $p.i.c.$-функтором.

Теорема 5.2.22.

Пусть F_β есть $p.i.c.$-функтор конечной степени. Тогда функтор F_β сохраняет класс паракомпактных $\sum$-пространств и класс паракомпактных p-пространств.

Теорема 5.3.10.

Пусть F_β есть $p.i.c.$-функтор степени m и $X-$ паракомпактное $\sum$-пространство. Тогда

$$\dim F_\beta\left(X\right) \leq m \dim X + \dim F_\beta\left(\{m\}\right) \equiv d(m).$$

-Пусть F есть $p.i.c.$ - функтор конечной степени и $X-$ паракомпактное σ - пространство или паракомпактное p-пространство. Тогда $\dim F_{\beta}\left(X\right) \leq m \dim X + \dim F_{\beta}\left(\{m\}\right)$.

-Пусть F есть $p.i.c.$ - функтор конечной степени m и $X-$ стратифицируемо, следовательно, пространство-метризуемое. Тогда $\dim F_{\beta}\left(X\right) \leq m \dim X + \dim F_{\beta}\left(\{m\}\right)$.

-Пусть F- нормальный финитный функтор конечной степени m, следовательно, функтор exp_m, и пусть X-паракомпактное σ-пространство (соответственно, St-пространство или паракомпактное p-пространство), тогда $\dim F_{\beta}\left(X\right) \leq m \dim X$.

-Пусть F- нормальный финитный функтор конечной степени, следовательно, функтор exp_m, и пусть X- стратифицируемое или метризуемое пространство. Тогда $\dim F_{\beta}\left(X\right) \leq m \dim X$.

Теорема 5.3.20.

Пусть F есть $p.i.c.$-функтор конечной степени, переводящий конечное множество в пространство конечной размерности, X есть слабо счетномерное пространство и принадлежит одному из следующих классов пространств:
a) $\sum$- паракомпактные пространства;
b) p -паракомпактные пространства;
c) σ-паракомпактные пространства;
d) стратифицируемые пространства;
e) метризуемые пространства.
Тогда $F_\beta\left(X\right)$ является слабо счетномерным пространством.

Следствие 5.3.22.

Пусть F- нормальный финитный функтор конечной степени, следовательно, функтор exp_m, пусть X- слабо счетномерное пространство и X является одним из следующих пространств:
a) $\sum$- паракомпактные пространства; b) p- паракомпактные пространства;
c) σ- паракомпактные пространства; d) стратифицируемые пространства;
e) метризуемые пространства.
Тогда $F_\beta\left(X\right)$ является слабо счетномерным пространством.

Теорема 5.4.35.

Функтор P_k является σ-p.i.c.-функтором для любого натурального числа k.

Теорема 5.4.57.

Пусть F нормальный подфунктор P_k в $Comp$. Тогда F_β является σ-p.i.c.-функтором.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

В зарубежных журналах:

1. Жураев Т.Ф. Пространство всех вероятностных мер с конечными носителями-гомеоморфно бесконечномерному линейному пространству. // В кн. Общая топология. Пространства и отображения. М. из-во МГУ.1989.С. 66-71.
2. Жураев Т.Ф. Некоторые основные свойства функтора P_f . Вестник МГУ. Сер. мех.-мат. (Moscow University Mathematics Bulletin). 1989. №6. С 29-33. (3.Scopus. IF=0.314).
3. Жураев Т.Ф.О функторе P вероятностных мер. // Вестник МГУ. Сер. мех.-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 1990. №1. С. 26-30. (3.Scopus. IF=0.314).
4. Жураев Т.Ф. О ковариантных функторах конечной степени, сохраняющих $A(N)R(\mathfrak{M})$ пространства. Доклады Болгарской академии наук (Comptes Rendus de L'Academie Bulgare des Sciences). –1990. Т.43(9). – С. 5-8. (3.Scopus. IF=0.244).

5. Жураев Т.Ф. Пространства всех вероятностных мер с конечными носителями произвольного сепарабельного σ- компактного пространства гомеоморфно бесконечномерному линейному пространству. // В кн. Геометрия. Топология. Приложения. М. из-во МГУ. 1990. С. 105-110.
6. Жураев Т.Ф. Некоторые основные свойства ковариантных функторов конечной степени в категориях M – метризуемых и St–стратифицируемых пространств. // В книге: Общая топология. Пространства, отображения и функторы. М. из-во МГУ.1992. С. 45-53.
7. Жураев Т.Ф. Функтор λ и метризуемость бикомпактов. // Вестник МГУ. Сер. мех.-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 1999. №4. С 54-56. (3.Scopus. IF=0.314).
8. Жураев Т.Ф. Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов Вестник МГУ. Сер. мех-мат (Moscow University Mathematics Bulletin). 2000. №4. С 8-11. (3.Scopus. IF=0.314).
9. Zhuraev T.F. On projectively quotrient functors. // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. 2001.Vol. 42(3). P. 561-573. (3.Scopus. IF=0.189).

10. Zhuraev T.F. On paracompact spaces and projectively inductively closed functors. // Applied General Topology.2002. Vol.3(1). P. 33-44. (3.Scopus. IF=0.638).
11. Жураев Т.Ф. Проективно индуктивно замкнутые функторы и размерность. Вестник Киргизского Националъного Университета имени Жасупа Баласагына.2014. №1. С. 17-22.
12. ZhuraevT.F. On dimension and $\sigma - p.i.c$ functors. // Mathematica Aeterna, International Journal for Pure and Applied Mathematics. Bulgariya. 2015. №6. P. 577-596.
13. ZhuraevT.F. On paracompact spaces, projectively inductively closed functors, and dimension. // Mathematica Aeterna, International Journal for Pure and Applied Mathematics. Bulgariya. 2015. №6. P. 175-189.
14. Ayupov Sh. A. Zhuraev T. F. On projectively inductively closed subfunctors of the functor P of probability measures. // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2020. Vol. 245(3). P. 382–389. (3.Scopus. IF=0.330).

15. Жураев Т.Ф. Ковариантные функторы конечной степени и $A(N)R(\mathfrak{M})$ пространства. // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences. –2017. –Vol. 16(148) –P. 34-37.
16. Жураев Т.Ф., Турсунова О., Жувонов К. Р. Ковариантные функторы и шейпы в категории компактов. // Современная математика. фундаментальные направления, Современные проблемы математики и физики (Journal of Mathematical Sciences). –2019. Том 65(1), С. 21-33. (3.Scopus. IF=0.330).
17. Жураев Т.Ф., Аюпов Ш.А., О проективно индуктивно замкнутых подфункторах функтора P вероятностных мер, Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. (темотические обзоры) Том 144, Москва, 2018. С.88-95.(3.Scopus. IF=0.330)

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

В республиканских журналах:

1. Известия АНУз ССР - 1.
2. Доклады АНРУз - 2.
3. Узбекский математический журнал -6.
4. УзМУ хабарлари -2.
5. Илм сарчашмалари -2.
6. Тошкент давлат педагогика университети ахборотлари -8.

В зарубежных конференциях:13 тезисов

В републиканских конференциях: 31 тезисов

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ