Гладкие функции на диске и их критические точки

К. В. Сторожук

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

2021

Четные на границе функции

$B^n \subset \mathbb{R}^n$ — шар, $S^{n-1} = \partial B^n$ — граничная сфера.
Функция $f : D \to \mathbb{R}$ четная на границе, если сужение $f|_S$ — четная функция, то есть

$$\forall s \in S^{n-1} \; f(s) = f(-s).$$

Точка p критическая, если $\nabla f(p) = 0$

Гипотеза: если функция четная на границе, то у нее имеется критическая точка.

$n = 1$: это теорема Ролля

Аргумент 1 в пользу гипотезы: теорема Борсука — Улама

Если функция нечетна в некоторой окрестности границы, а не только на самой границе, то гипотеза, так как применима теорема Борсука — Улама, ведь векторное поле $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n$ нечетное на граничной сфере. Вот почему:
Пусть $inf(x) = (-x)$, тогда вблизи границы $f = f \circ inv$ и

$$df(x) = d(f \circ inv)(x) = df(inv(x)) \circ dinv(x) = df(-x) \cdot -1.$$

Отступление: имеется работа
Б. Д. Гельман, Теорема Борсука—Улама в бесконечномерных банаховых пространствах, Матем. сб., 2002, том 193, номер 1, 83–92.
в которой даны приложения к теории квазинеподвижных точек и к управляемым системам, к нелинейным системам в частности.

Аргумент 2 в пользу гипотезы: теория Морса

Можно считать: экстремумы f — лишь на границе.
В частности, на границе имеется две (по крайней мере) антиподальные точки максимума Max и две точки минимума min.
Линия уровня функции f вблизи значений Max является парой коротких дуг. То же — вблизи min.
Идея: при изменении значения линий уровня в какой-то момент произойдет «перестройка» типа седла — это и будет критическая точка.

Аргумент3 в пользу гипотезы: контуры поверхности графика

Рассмотрим график функции f, это двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$, граница его — гладкая кривая, симметричная относительно $x, y, z \leftrightarrow (-x, -y, z)$.
Считаем это множество просвечивающим и будем смотреть на него сбоку и поворачивать. Нам будут видны складки, сборки и т.п. в виде четких линий.
При повороте на 180° эти линии будут видны под противоположным наклоном. Правдоподобно предположить, что в процессе поворачивания наклон где-то должен стать горизонтальным — но это означает, что имеется горизонтальная касательная плоскость, т.е. имеется критическая точка.

Двойственный подход: траектории векторного поля ∇f

Если критических точек нет, то траектории векторного поля ∇f — это одномерные многообразия, то есть дуги или наборы дуг.
Эти дуги имеют входы и выходы на границе S диска D.
Естественно предположить, что найдется такая дуга, которая входит и выходит в паре точек вида $-s, s$. Тогда $f(s) \neq f(-s)$.

дополнение гладкой функции f гладкой функцией g и погружения диска

Можно ли дополнить невырожденную функцию $f : B \to \mathbb{R}$ еще одной независимой гладкой функцией $g : B \to \mathbb{R}$?
(Ответ положительный, хотя прямых ссылок мне неизвестно)
Близкие по тематике результаты:

- Е. А. Кудрявцева, «Реализация гладких функций на поверхностях в виде функций высоты», Матем. сб., 190:3 (1999), с. 29–88.
- P. Dombrowski, «On global solutions for partial differential equations of first order» Published 1961 Mathematics Bulletin of the AMS...

Тогда получится погружение $(g, f) : B \to \mathbb{R}^2$ диска B в двумерную плоскость, причем функция f будет функцией высоты.

погружение поверхности в $\mathbb{R}^2$, если уже задано вложение граничной кривой: это возможно не всегда

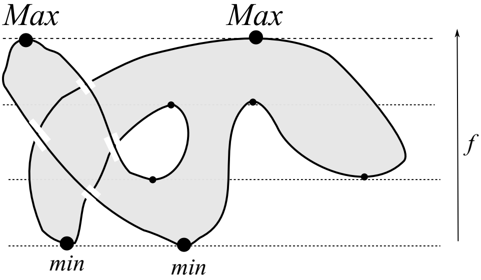
Для того, чтобы это можно было сделать, нужно, чтобы граничная кривая имела определенные индексы относительно определенных точек...

- George K. Francis, «Spherical Curves that Bound Immersed Discs», PAMS, Vol. 41, No. 1 (Nov., 1973), pp. 87-93

Аргумент 1 против гипотезы: известные нам двумерные варианты обобщения теоремы Ролля звучат более громоздко

- Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963, 245 с.
  Достаточное условие на наличие критической точки: на границе есть только глобальные *Max* и *min*. И еще несколько вариантов теоремы.
- Обобщение теорем Ролля и Дарбу для функций двух переменных. Забрейко П.П., Кривко-красько А.В. 2018, v.54,№3, pp 290-299. Proc. of the National Academy of Sciences of Belarus, Phys. and Math. ser.

Аргумент 2 против гипотезы: контрпример



Поиски явного вида функции

Работаем в полярной системе координат (r, t). При $r = 1$ должна получиться функция $f(t)$ — тригонометрический многочлен. Надо, чтобы он был π-периодичный и чтобы он проходил экстремумы на нужных высотах в нужном нам порядке. Например $cos(2t) - sin(4t)$.
Теперь мы будем искать уже нужный нам многочлен в виде тригонометрического по t многочлена $h(r, t) = a(r, t) + b(r, t)$.
Нужно сделать так, чтобы $a(1, t) = f(t)$ и $b(1, t) \equiv 0$. Тогда сужение функции h на окружность $r = 1$ совпадет с функцией f.
Ищем функцию $a(r, t)$ в виде $r^2 \cos(2t) - 2r^4 \sin(4t)$.
Функцию b ищем в виде $(1 - r^2) \cdot P(x, y)$, где
$P(x, y) = (a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy)$ — многочлен второго порядка от переменных $(x, y) = (r \cos(t), r \sin(t))$.

пример функции и фазовый портрет

$$3xy - 14xy^3 + x - 4y + x^2 - y^2 - x^3 + 4x^2y - x^4 - y^2x + 4y^3 + y^4.$$

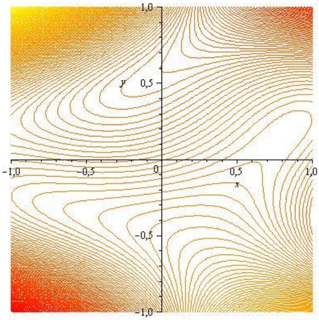


Рис.: