О математических моделях гидродинамики

Андрей Звягин

Воронежский Государственный Университет
zvyagin.a@mail.ru

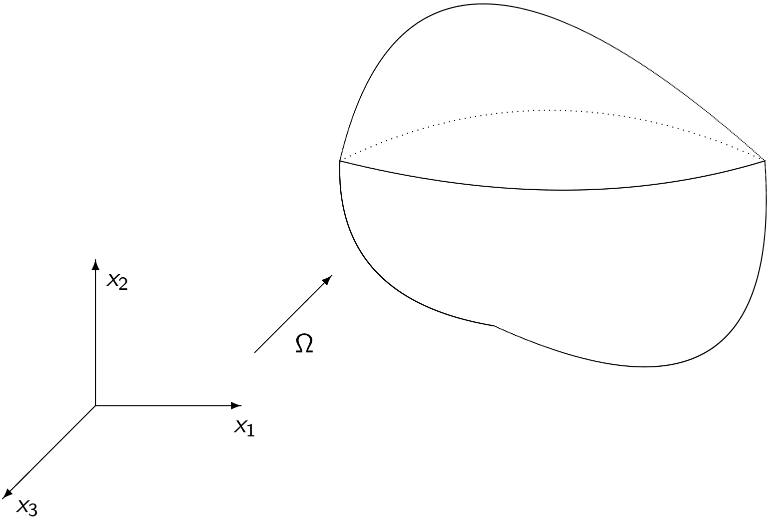
Семинар «Оптимизация и нелинейный анализ» Лаборатории ИПУ РАН

26 ноября 2020
Воронеж

Постановка моделей

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, — ограниченный сосуд с границей $\Gamma = \partial\Omega$, целиком заполненный некоторой средой, которую в дальнейшем будем называть жидкостью. Жидкость будем представлять как совокупность материальных частиц, заполняющих сосуд Ω, причём эти частицы будем считать настолько малыми, что их можно отождествлять с точками объёма Ω . Под движением жидкости мы будем понимать движение материальных точек объёма Ω.

Таким образом, описать путь, который проходит каждая точка объёма Ω за время $t_0 \leqslant t \leqslant T$, это и означает описать движение жидкости за это время.



Положение движущейся точки объёма Ω можно описать с помощью вектор-функции $x(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2 + x_3(t)e_3$. Если в начальный момент времени t_0 частица жидкости занимала положение x_0, а её движение описывается с помощью закона $x(t)$, то $x(t_0) = x_0$.

Таким образом, движение жидкости будет описано, если будут найдены все эти вектор-функции $x(t)$.

Зафиксируем момент времени t. В этот момент времени частица жидкости, двигающаяся по закону $x(t)$, имеет скорость

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t)e_1 + \dot{x}_2(t)e_2 + \dot{x}_3(t)e_3.$$

Обозначим через $v(t, x)$ — скорость частицы жидкости, находящейся в момент времени t в точке x. Тогда

$$\dot{x}(t) = v(t, x(t)).$$

Если известны скорость движущейся жидкости в каждой точке $x \in \Omega$ в каждый момент времени t, то есть известна вектор-функция $v(t, x)$, определённая для всех $x \in \Omega$ и $t \in [t_0, T]$, то, для того чтобы найти вектор-функцию $x(t)$, описывающую движение частицы жидкости, занимающей в начальный момент t_0 положение x_0, надо решить следующую задачу Коши для векторного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = v(t, x(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in \overline{\Omega}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Таким образом, для того, чтобы описать движение жидкости, достаточно знать распределение скоростей жидкости в каждой точке $x \in \Omega$ в каждый момент времени $t \in [t_0, T]$ или, что то же самое, знать вектор-функцию $v(t, x)$.

Для определения вектор функции $v(t,x)$ исходят из принципа Даламбера, т.е. все силы, приложенные к любому объему жидкости, уравновешивают друг друга. На любой объем жидкости действуют следующие силы:

1. силы инерции: $\rho(t,x)\frac{dv(t,x)}{dt} = \rho(t,x)\left[\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i(t,x)\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i}\right]$;
2. внутренней силы или силы трения между частицами:
$$\mathrm{Div}\,\sigma(t,x) + \nabla p(t,x);$$
3. внешние силы: $\rho(t,x)f(t,x)$.

Общее уравнение движения среды

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\mathrm{Div}\,\sigma+\nabla p=\rho f.$$

Дополнительные условия:

1. $\rho = const$;
2. Условие несжимаемости среды:

$$\mathrm{div}\ v(t,x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j(t,x)}{\partial x_j}=0.$$

Система уравнений движения однородной несжимаемой среды

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\, \sigma + \nabla p = f;$$

$$\mathrm{div}\ v = 0.$$

Реологические соотношения

1. Система Эйлера: $\sigma = 0$;

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p = f;$$

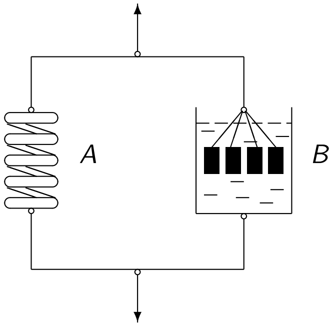
$$\mathrm{div}\ v = 0.$$

2. Система Навье-Стокса: $\sigma = 2\mu\mathcal{E}$, где $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ — девиатор тензора напряжений; $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij}(v))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ – тензор скоростей деформации.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu\Delta v + \nabla p = f;$$

$$\mathrm{div}\ v = 0.$$

Например, предположим, что у нас есть пористая губка, наполненная вязкой жидкостью. Структурная модель такого тела изображена на рисунке. На данном рисунке элементы A и B соединены параллельно. Тогда под действием растягивающей силы пружина удлиняется. При этом поршень будет двигаться в жидкости, которая проходит сквозь отверстия поршня. Это просачивание жидкости связано с вязким сопротивлением, поэтому полное растяжение пружины наступает не сразу. После устранения нагрузки пружина сжимается до первоначальной длины, но это требует времени вследствие вязкого сопротивления жидкости, которая вновь должна пройти через отверстия в поршне.



Реологическое соотношение

Для вязкоупругих жидкостей используется соотношение

$$\sigma = 2\mu\mathcal{E} + 2\varkappa\dot{\mathcal{E}},$$

где $\nu > 0$ – вязкость жидкости, $\varkappa > 0$ – время ретардации (запаздывания), $\mathcal{E}(v)$ – тензор скоростей деформации, а $\dot{\mathcal{E}}$ – производная по времени тензора скоростей деформации.

Реологическое соотношение

1. Модель Фойгта

$$\sigma = 2\mu\mathcal{E} + 2\varkappa\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}$$

2. Модель Кельвина-Фойгта

$$\sigma = 2\mu\mathcal{E} + 2\varkappa\frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

Объективная производная

Определение.

Пусть $T(t,x)$ – произвольная тензорнозначная функция, не зависящая от наблюдателя. Оператор вида

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + G(\nabla v(t,x), T(t,x)),$$

где G – некоторая матричнозначная функция двух матричных аргументов, называется объективной производной, если при любом изменении системы отсчета

$$t^* = t + a, \quad x^* = x_0^*(t) + Q(t)(t - t_0),$$

выполнено равенство $\frac{D^* T^*(t,x)}{Dt^*} = Q(t)\frac{DT(t,x)}{Dt}Q(t)^T$ (где a – некоторое значение времени, x_0 – точка в пространстве, x_0^* – функция времени со значениями в точках пространства, а Q – функция времени со значениями в множестве ортогональных тензоров).

Пример объективной производной

Одним из примеров производной, при которой реологическое соотношение удовлетворяет принципу объективности, является регуляризованная производная Яуманна:

$$\frac{DT(t,x)}{Dt} = \frac{dT(t,x)}{dt} + T(t,x)W(t,x) - W(t,x)T(t,x),$$

где $W(v) = (W_{ij}(v))_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,n}$, $W_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ – тензор завихренности.

Математическая модель движения растворов полимеров

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \text{grad } p - \mu\Delta v - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \text{Div}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right) -$$

$$-2\varkappa \text{Div}\big(\mathcal{E}(v)W(v) - W(v)\mathcal{E}(v)\big) = f,$$

$$\text{div } v = 0.$$

- C. LeRoux // Arch. Ration. Mech. Anal. 148. 309–356. (1999)
- Zvyagin A.V. // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2013. V. 90. pp. 70-85.
- Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A. // Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2014. Vol.16. pp. 27–82.
- A.V. Zvyagin // Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2018, Vol. 28, N. 12, P. 6305-6325.
- O. A. Frolovskaya, V. V. Pukhnachev // Polymers. 2018, 10, 684.

Дробная производная

- Вязкоупругие среды: $\sigma = 2\mu\mathcal{E} + 2\varkappa\dot{\mathcal{E}}$.
- Дробная производная Римана–Лиувилля

$$D_{0t}^{\beta}\varphi = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_0^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-(n-\beta)}}$$

порядка $\beta > 0$ ($n = [\beta] + 1$, $[\beta]$ — целая часть числа $\beta \in \mathbb{R}$) функции $\varphi(t)$, $t \in [0, T]$. $\Gamma(\alpha)$ — гамма–функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,dt$

$$
\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v + \nabla p -
$$

$$
-\mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\lambda} \mathcal{E}(v)(s,x)\, ds = f;
$$

$$
\mathrm{div}\, v(t,x) = 0.
$$

Регулярные лагранжевые потоки

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))\, ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega.$$

Определение

Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v, называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. для п. в. $x \in \overline{\Omega}$ и $t \in [0, T]$ функция $\gamma(\tau) = z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (18);
2. для любых $t, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \overline{\Omega}$ с мерой Лебега $m(B)$ справедливо равенство $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$;
3. для всех $t_i \in [0, T]$, $i = 1, 2, 3$, и почти всех $x \in \overline{\Omega}$ справедливо $z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x))$.

Регулярные лагранжевые потоки

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))\, ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega.$$

Определение

Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v, называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. для п. в. $x \in \overline{\Omega}$ и $t \in [0, T]$ функция $\gamma(\tau) = z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (18);
2. для любых $t, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \overline{\Omega}$ с мерой Лебега $m(B)$ справедливо равенство $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$;
3. для всех $t_i \in [0, T]$, $i = 1, 2, 3$, и почти всех $x \in \overline{\Omega}$ справедливо $z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x))$.

Теорема

Пусть $v \in L_1(0, T; W_p^1(\Omega))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\operatorname{div} v(t,x) = 0$, $(t,x) \in [0, T] \times \Omega$, и $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП $z \in C(D; L)$, порожденный v, где $C(D, L)$ – банахово пространство непрерывных функций на D со значениями в L. Более того, $z(s; t, \cdot) \in W_1^1(\Omega)$; $z(\tau; t, \overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$ с точностью до множества меры нуль и $\frac{\partial}{\partial\tau} z(\tau; t, x) = v(\tau, z(\tau; t, x)), \quad t, \tau \in [0, T], \quad$ при п. в. $\quad x \in \Omega$.

- R. J. DiPerna, P.-L. Lions // Invent. Math. 1989.
- G. Crippa, C. de Lellis // J. Reine Angew. Math. 2008.
- G. Crippa // Boll. Unione Mat. Ital. 2008.

Дробная модель Фойгта

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v -$$

$$-\mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\lambda} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))\, ds + \nabla p = f;$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))\, ds, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \overline{\Omega};$$

$$\mathrm{div}\, v(t, x) = 0.$$

- Звягин А.В. // Успехи математических наук, 2019, Т. 74, В. 3, Стр. 189-190.
- Звягин А.В. // Известия Академии Наук. Серия математическая. 2021. Т. 85, Н. 1

Жидкости с памятью

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \nabla v_i - \mu_0 \Delta v -$$

$$- \mu_1 \mathrm{Div} \int_0^t e^{(s-t)/\lambda} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))\, ds + \nabla p = f,$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))\, ds, \quad 0 \leqslant t, \tau \leqslant T.$$

$$\mathrm{div}\, v = 0.$$

Модель Максвелла

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\,\sigma + \nabla p = f,$$

$$\boxed{\sigma + \lambda \frac{D\sigma}{Dt} = 2\mu\mathcal{E},}$$

$$\sigma + \lambda\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \sigma W - W\sigma\right) = 2\mu\mathcal{E},$$

$$\mathrm{div}\, v = 0.$$

Модель Джеффриса-Олдройда

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = f,$$

$$\boxed{\sigma + \lambda_1 \frac{D\sigma}{Dt} = 2\mu\mathcal{E} + 2\mu\lambda_2 \frac{D\mathcal{E}}{Dt},}$$

$$\sigma + \lambda_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \sigma W - W\sigma \right) =$$

$$= 2\mu \left(\mathcal{E} + \lambda_2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} + \mathcal{E} W - W\mathcal{E} \right) \right),$$

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Определение.

Пусть $u_0 \in V$, $\sigma_0 \in L_2(\Omega)$. Пара функций u, σ из класса

$$u \in C_w([0,\infty); V), \quad \sigma \in C_w([0,\infty); L_2(\Omega)),$$

называется диссипативным решением, если для некоторых функций $\xi \in C^1([0,\infty); V_3)$, $\theta \in C^1([0,\infty); H^2(\Omega))$ и некоторого $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$2\mu\|u(t)-\xi(t)\|_V^2 + \|\sigma(t)-\theta(t)\|^2 \leqslant \exp\Big(\int_0^t \Gamma(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big[2\mu\|u_0-\xi(0)\|_V^2 +$$
$$+\|\sigma_0-\theta(0)\|^2 + \int_0^t \exp\Big(\int_s^0 \Gamma(\psi)\,\mathrm{d}\psi\Big)[4\mu(E_1(\xi,\theta)(s), u(s)-\xi(s))+$$
$$+2(E_2(\xi,\theta)(s), \sigma(s)-\theta(s))]\,\mathrm{d}s\Big],$$

где $\Gamma(t) = \gamma \max\left\{1, \frac{1}{\alpha^2}\right\}\left(\|\Delta_\alpha \xi(t)\|_1 + \|\xi(t)\|_1 + \alpha^2\|\xi(t)\|_3 + \frac{(1+\mu)\|\theta(t)\|_2}{\mu}\right)$, и γ — некоторая константа, зависящая от свойств области Ω.

Теорема

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$ класса C^2 и $u_0 \in V$, $\sigma_0 \in L_2(\Omega)$. Тогда выполнены следующие условия:
a) существует диссипативное решение;
b) если для некоторых $u_0 \in V$, $\sigma_0 \in L_2(\Omega)$, существует $T > 0$ и сильное решение $u_T \in C^1([0, T]; V_3)$, $\sigma_T \in C^1([0, T]; H^2(\Omega))$, то сужение любого диссипативного решения (с такими же начальными данными) на $[0, T]$, совпадает с u_T, σ_T;
c) любое сильное решение $u_T \in C^1([0, \infty); V_3)$, $\sigma_T \in C^1([0, \infty); H^2(\Omega))$, является единственным диссипативным решением.

Zvyagin A., Polyakov D. // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2021

Модель Бингама

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \operatorname{grad} p = f,$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \dfrac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} & \text{для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leqslant \tau^* & \text{для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases}$$

$$\operatorname{div} v = 0.$$

В.Г. Звягин, А.В. Звягин, М.В. Турбин // Записки научных семинаров ПОМИ, 2018, Т. 477, стр. 54-86.

Модель с вязкостью, зависящей от температуры

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}\,(\mu(\theta)\mathcal{E}(v)) + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta\, \theta = 2\mu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v) + g. \tag{3}$$

Звягин А.В. // Математические Заметки, 2019, Т. 105, В. 6, стр. 839-856.

Спасибо за внимание!