

КРИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Измаилов Алексей Феридович

`izmaf@cs.msu.ru`

МГУ им. М.В. Ломоносова

Москва, ИПУ РАН, 15 октября 2020 г.

Содержание

- 1 Критические множители Лагранжа
 - Мотивирующий пример
 - Понятие и свойства критических множителей
- 2 Критические решения нелинейных уравнений
 - Понятие критического решения
 - Некритические решения неустойчивы
 - Критические решения часто устойчивы
 - Критические решения притягивают ньютоновские траектории
- 3 Снова критические множители Лагранжа
 - Критические решения и критические множители
 - 2-регулярность и ключевое предположение
- 4 Заключительные замечания

Постановка задачи

Задача оптимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad h(x) = 0,$$

где $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ — дважды дифференцируемые.

Система Лагранжа для стационарных точек и множителей

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda) = 0, \quad h(x) = 0,$$

где $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle.$$

Метод Ньютона–Лагранжа (NLM)

Для текущего приближения $(x^k, \lambda^k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$

Итерация

Вычисляем (x^{k+1}, λ^{k+1}) как решение системы линейных уравнений

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k)(x - x^k) + (h'(x^k))^T(\lambda - \lambda^k) = -\frac{\partial L}{\partial x}(x^k, \lambda^k),$$

$$h'(x^k)(x - x^k) = -h(x^k).$$

Это итерация метода Ньютона для системы Лагранжа.

Метод Ньютона–Лагранжа

Локальная сверхлинейная сходимость к решению $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ предполагает по крайней мере регулярность ограничений:

$$\text{rank } h'(\bar{x}) = l.$$

Если оно не выполнено, то решение $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ не может быть изолированным, и для этого случая разработаны специальные модификации метода Ньютона:

- стабилизированный NLM (sNLM);
- метод Левенберга–Маквардта (LM);
- метод LP-Newton (LP-N).

Все они локально сверхлинейно сходятся вблизи множителей, удовлетворяющих достаточному условию второго порядка оптимальности, даже при нарушении условия регулярности ограничений.

«Проблемные» множители Лагранжа

Пример

Для задачи

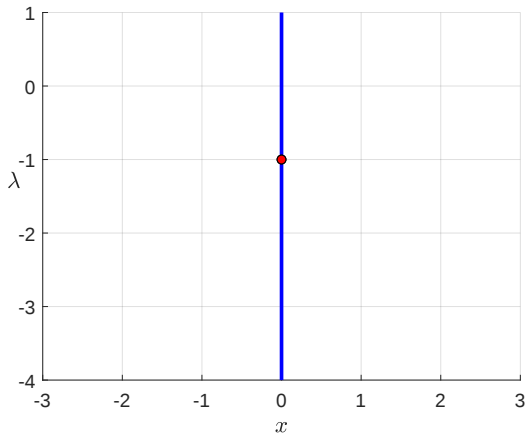
$$x^2 \rightarrow \min, \quad x^2 = 0,$$

система Лагранжа

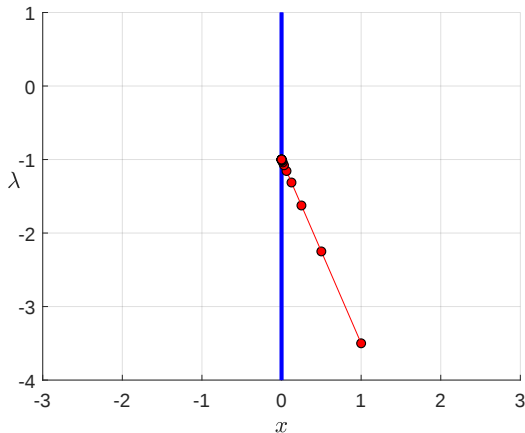
$$2x(1 + \lambda) = 0, \quad x^2 = 0,$$

имеет множество решений $\{0\} \times \mathbb{R}$.

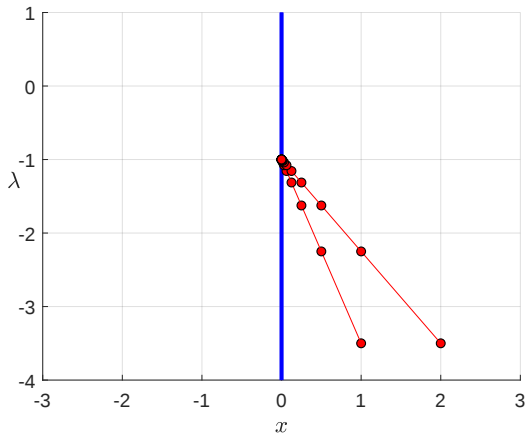
Пример: NLM



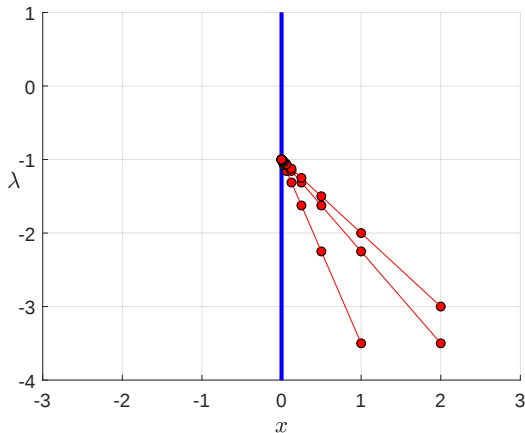
Пример: NLM



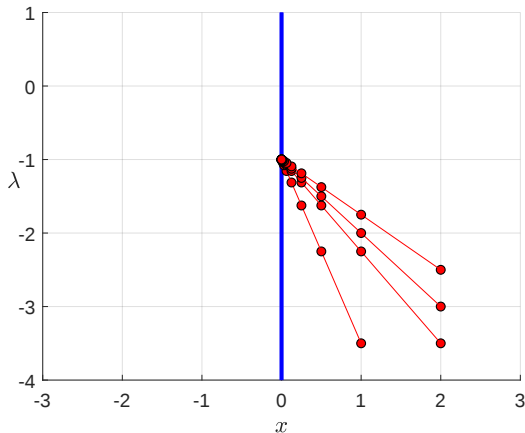
Пример: NLM



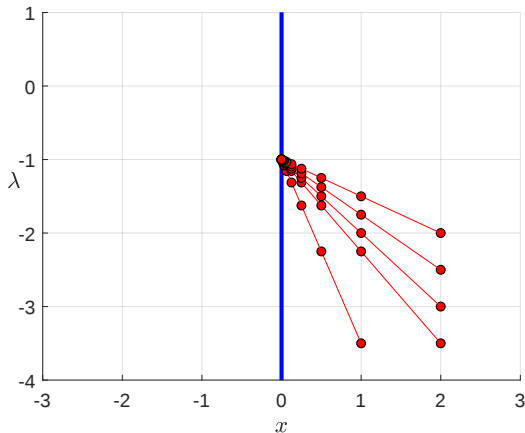
Пример: NLM



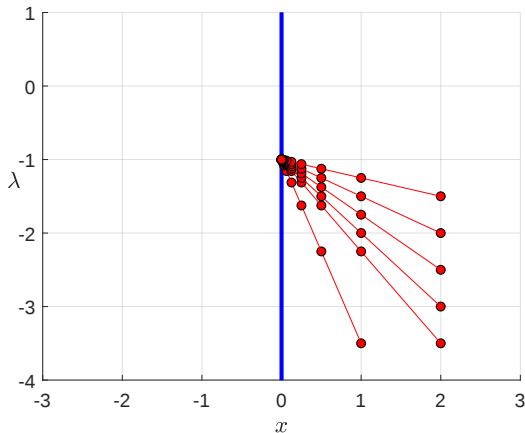
Пример: NLM



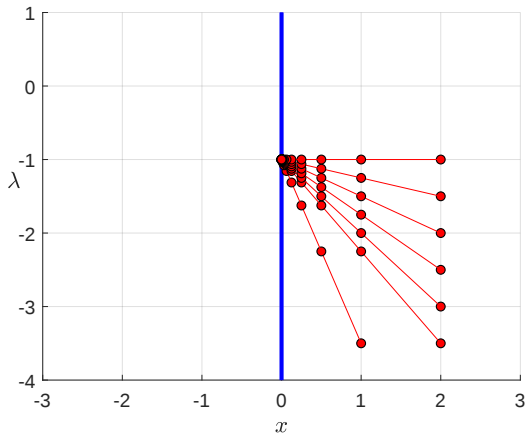
Пример: NLM



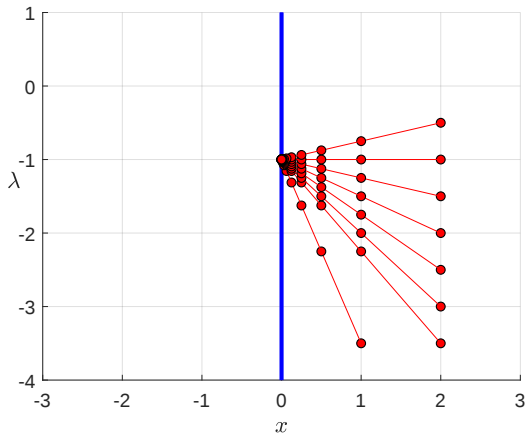
Пример: NLM



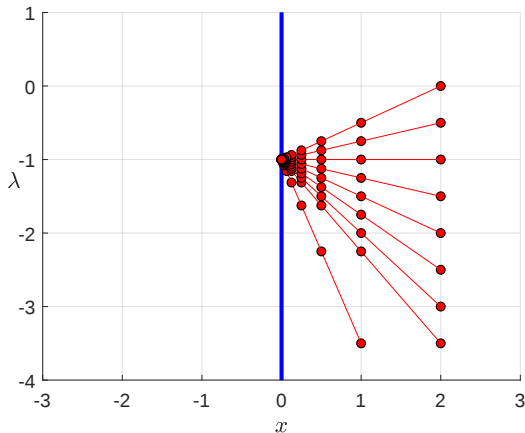
Пример: NLM



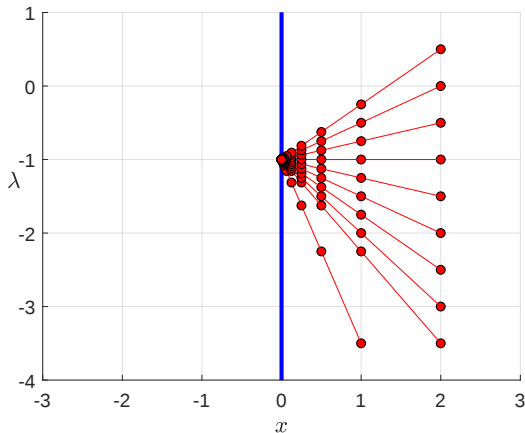
Пример: NLM



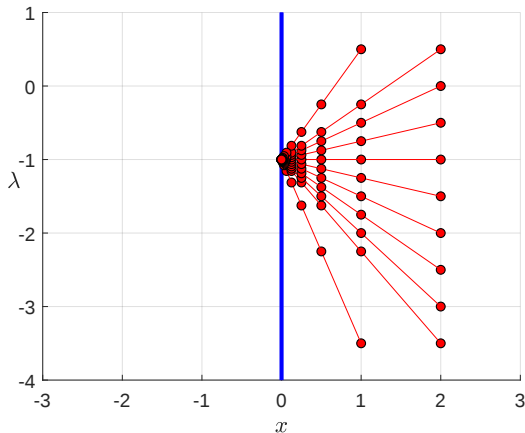
Пример: NLM



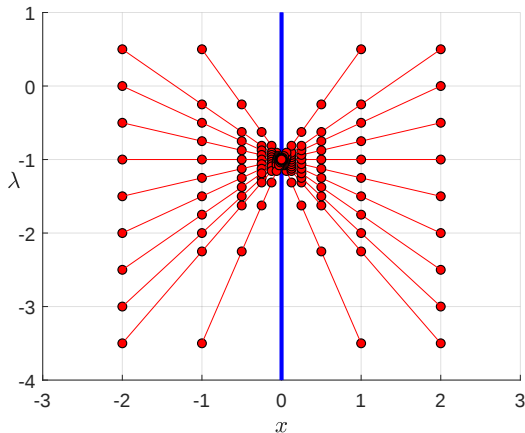
Пример: NLM



Пример: NLM



Пример: NLM



«Проблемные» множители Лагранжа и ньютоновские методы

Пример (продолжение)

NLM:

$$2(1 + \lambda^k)(x - x^k) + 2x^k(\lambda - \lambda^k) = -2x^k(1 + \lambda^k),$$

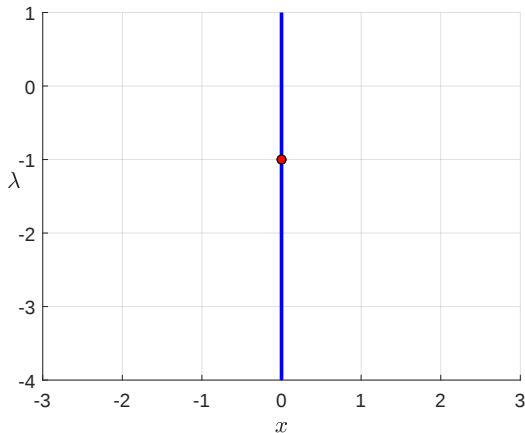
$$2x^k(x - x^k) = -(x^k)^2$$

$$\downarrow \text{ (при } x^k \neq 0 \text{)}$$

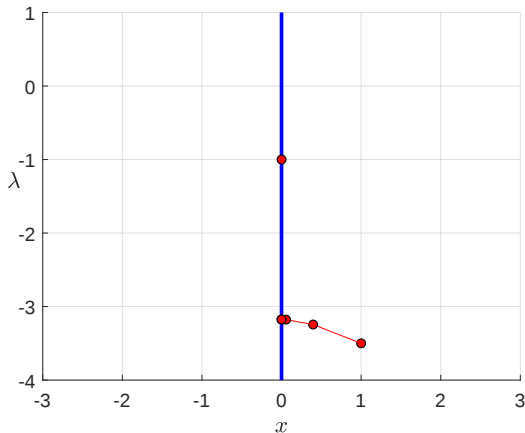
$$x^{k+1} = \frac{1}{2}x^k, \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k - \frac{1}{2}(1 + \lambda^k) \Rightarrow \lambda^{k+1} + 1 = \frac{1}{2}(\lambda^k + 1).$$

Последовательность $\{(x^k, \lambda^k)\}$ сходится к $(\bar{x}, \bar{\lambda}) = (0, -1)$ с **линейной скоростью** с общим частным $1/2$.

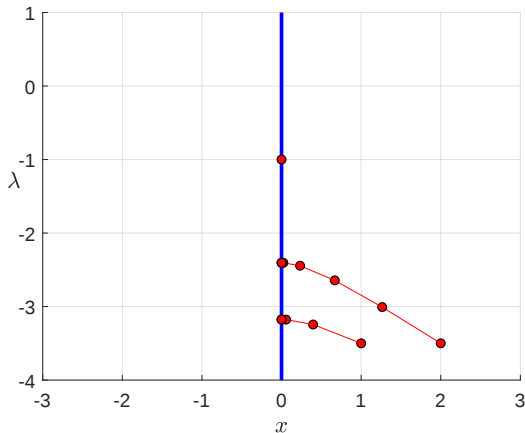
Пример: метод LM



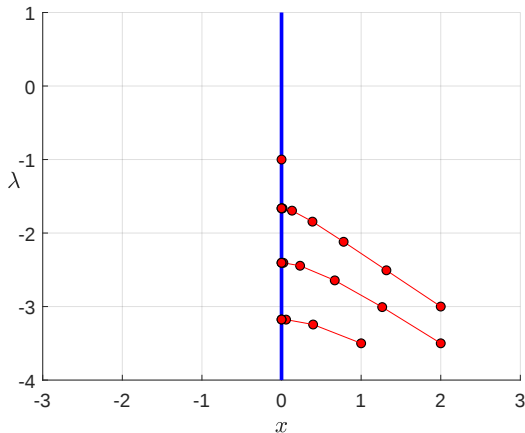
Пример: метод LM



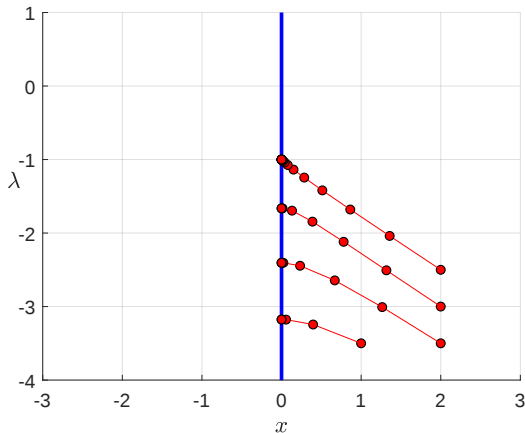
Пример: метод LM



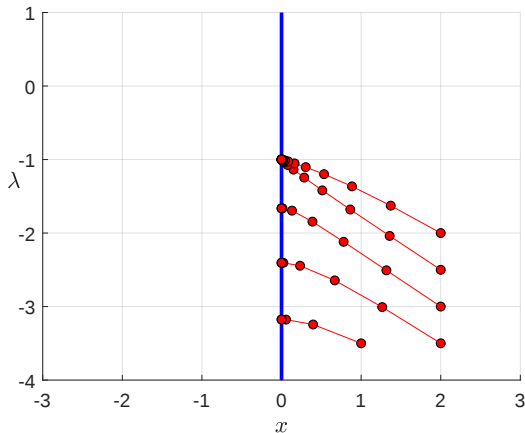
Пример: метод LM



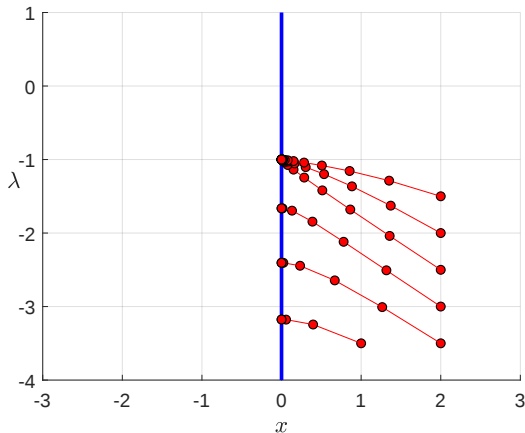
Пример: метод LM



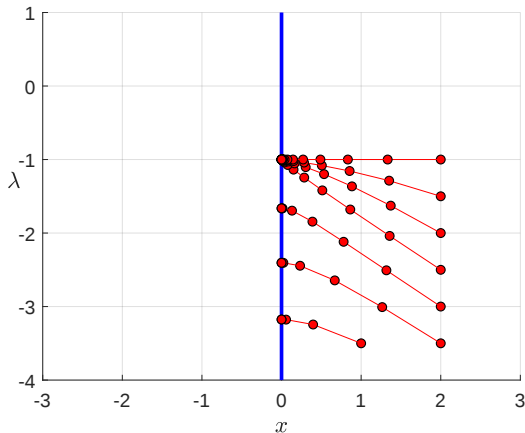
Пример: метод LM



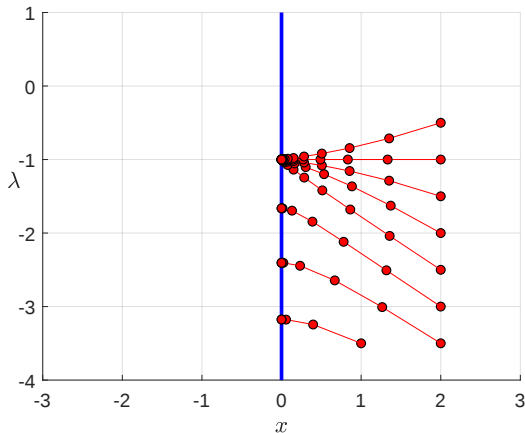
Пример: метод LM



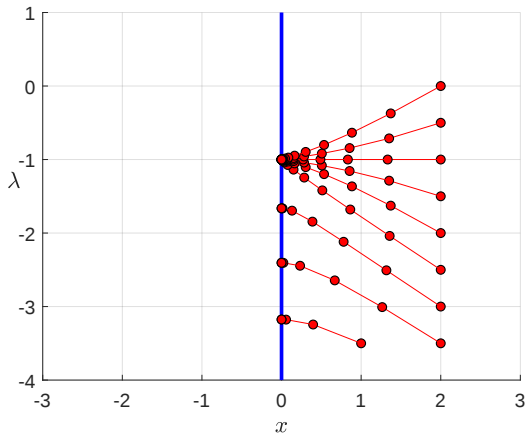
Пример: метод LM



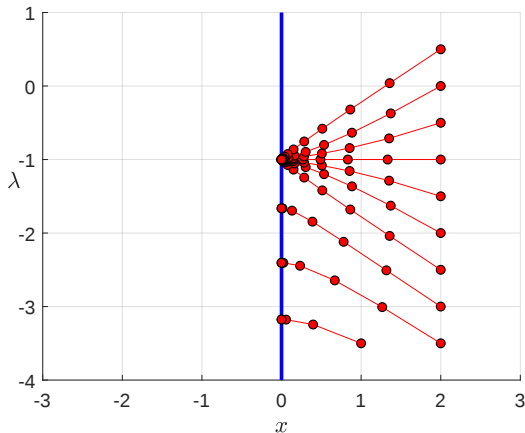
Пример: метод LM



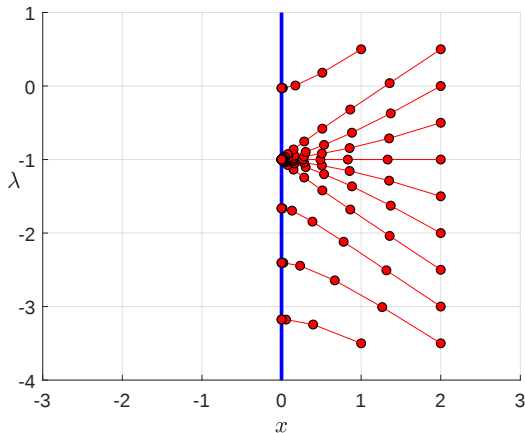
Пример: метод LM



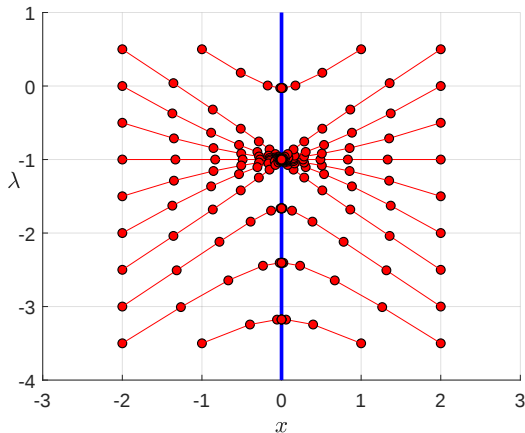
Пример: метод LM



Пример: метод LM



Пример: метод LM



«Проблемные» множители Лагранжа и возмущения

Пример (продолжение)

Канонические возмущения:

$$x^2 - ax \rightarrow \min, \quad x^2 = b,$$

где $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$ — параметры.

Система Лагранжа

$$2x(1 + \lambda) = a, \quad x^2 = b,$$

$$\downarrow \text{ (при } b > 0 \text{)}$$

$$x(b) = \pm\sqrt{b}, \quad \lambda(a, b) = -1 \pm \frac{a}{2\sqrt{b}}.$$

«Проблемные» множители Лагранжа и возмущения

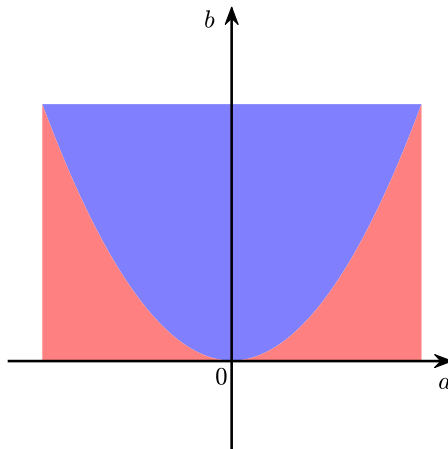
Пример (продолжение)

Если $(a, b) \rightarrow 0$, причем $b \geq \gamma|a|^q$ при фиксированных $\gamma > 0$ и $q \in (0, 2)$, то

$$\frac{|a|}{2\sqrt{b}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}|a|^{1-q/2} \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda(a, b) \rightarrow -1.$$

- Множители Лагранжа, отличные от $\bar{\lambda} = -1$, могут быть устойчивы только по отношению к очень специальным возмущениям, а именно, к таким, что $(a, b) \rightarrow 0$ «вдоль» прямой $b = 0$: **при сколь угодно малых возмущениях «общего положения» такие множители исчезают.**
- Множитель Лагранжа $\bar{\lambda} = -1$ устойчив по отношению к широкому классам возмущений.

Пример: канонические возмущения



Критические множители Лагранжа

Определение

Множитель Лагранжа $\bar{\lambda}$, отвечающий стационарной точке $\bar{x}$, называется **критическим**, если существует $\xi \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \{0\}$ такой, что

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda})\xi \in \operatorname{im}(h'(\bar{x}))^\top.$$

Иначе множитель $\bar{\lambda}$ называется **некритическим**.

Критичность $\bar{\lambda} \Leftrightarrow$ вырожденности симметричной матрицы $H(\lambda)$ квадратичной формы

$$\xi \mapsto \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \lambda)\xi, \xi \right\rangle : \ker h'(\bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}$$

при $\lambda = \bar{\lambda}$.

Множество критических множителей

Если множество $\Lambda(\bar{x})$ отвечающих $\bar{x}$ множителей Лагранжа не одноточечное, то оно может содержать критические множители устойчивым образом.

При этом множество критических множителей обычно является тощим в $\Lambda(\bar{x})$, поскольку оно характеризуется алгебраическим уравнением

$$\det H(\lambda) = 0$$

на аффинном множестве $\Lambda(\bar{x})$.

Достаточное условие второго порядка (SOSC)

Множитель $\bar{\lambda}$ всегда некритический, если он удовлетворяет SOSC

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda})\xi, \xi \right\rangle > 0 \quad \forall \xi \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \{0\}.$$

Если выполняется «необходимое» условие второго порядка

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda})\xi, \xi \right\rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in \ker h'(\bar{x}),$$

то некритичность $\bar{\lambda} \Leftrightarrow \text{SOSC}$.

Невырожденность матрицы Якоби системы Лагранжа

Предложение

Для стационарной точки $\bar{x}$ и отвечающего ей множителя Лагранжа $\bar{\lambda}$ матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda}) & (h'(\bar{x}))^\top \\ h'(\bar{x}) & 0 \end{pmatrix} = L''(\bar{x}, \bar{\lambda})$$

системы Лагранжа невырождена $\Leftrightarrow$

- в точке $\bar{x}$ выполняется условие регулярности ограничений ($\Rightarrow$ множитель $\bar{\lambda}$ единственный), и
- множитель $\bar{\lambda}$ не критический.

Характеризация некритичности

Теорема

Для стационарной точки $\bar{x}$ отвечающий ей множитель Лагранжа $\bar{\lambda}$ некритический $\Leftrightarrow$ выполняется любое из следующих эквивалентных свойств:

- имеет место оценка

$$\|x - \bar{x}\| + \text{dist}(\lambda, \Lambda(\bar{x})) = O\left(\left\|\left(\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda), h(x)\right)\right\|\right)$$

при $(x, \lambda) \rightarrow (\bar{x}, \bar{\lambda})$;

Характеризация некритичности

Теорема (завершение)

- для любого возмущения $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ и любого решения $(x(a, b), \lambda(a, b))$ системы Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda) = a, \quad h(x) = b$$

канонически возмущенной задачи оптимизации, достаточно близкого к $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, имеет место оценка

$$\|x(a, b) - \bar{x}\| + \text{dist}(\lambda(a, b), \Lambda(\bar{x})) = O(\|(a, b)\|)$$

при $(a, b) \rightarrow (0, 0)$.

Неизолированные стационарные точки

Если $\bar{x}$ — **неизолированная** стационарная точка, а $\bar{\lambda}$ — предел последовательности множителей Лагранжа, отвечающих стационарным точкам, образующим сходящуюся к $\bar{x}$ последовательность, то $\bar{\lambda}$ обязательно является отвечающим $\bar{x}$ критическим множителем Лагранжа.

В частности, если $\bar{x}$ — неизолированная стационарная точка, удовлетворяющая условию регулярности ограничений, то единственный отвечающий ей множитель Лагранжа является критическим.

Специальные свойства критических множителей

Критические множители Лагранжа

- притягивают траектории ньютоновских методов, и именно поэтому последние обычно теряют сверхлинейную скорость сходимости на задачах с нерегулярными ограничениями;
- обладают особыми свойствами устойчивости (в отличие от некритических, которые обычно исчезают при возмущениях).

Почему?!

...

Постановка задачи

Понимание критичности как нарушения локальной липшицевой оценки расстояния до множества решений — ключ к распространению этой концепции на более общие задачи.

Нелинейное уравнение

$$\Phi(u) = 0,$$

где $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ — дифференцируемое отображение.

Особые решения нелинейных уравнений

Решение $\bar{u}$ называется **неособым**, если

$$\text{rank } \Phi'(\bar{u}) = q;$$

иначе **особым**.

Если $p = q$, то всякое неизолированное решение является особым.

Для любого решения $\bar{u}$ выполняется

$$T_{\Phi^{-1}(0)}(\bar{u}) \subset \ker \Phi'(\bar{u}),$$

причем если решение $\bar{u}$ неособое, то верно и обратное включение $\Rightarrow$

$$T_{\Phi^{-1}(0)}(\bar{u}) = \ker \Phi'(\bar{u}).$$

Критические решения нелинейных уравнений

Определение

Решение $\bar{u}$ называется *некритическим*, если

- множество решений $\Phi^{-1}(0)$ регулярно по Кларку в точке $\bar{u}$, и
- выполняется равенство

$$T_{\Phi^{-1}(0)}(\bar{u}) = \ker \Phi'(\bar{u}).$$

Иначе решение $\bar{u}$ называется *критическим*.

Требования гладкости

Определение

Отображение Φ называется *строго дифференцируемым* в точке $\bar{u} \in \Phi^{-1}(0)$ *относительно множества* $\Phi^{-1}(0)$, если оно дифференцируемо в точке $\bar{u}$ и

$$\|\Phi(u) - \Phi'(\bar{u})(u - \hat{u})\| = o(\|u - \hat{u}\|)$$

при $u \rightarrow \bar{u}$ и $\hat{u} \rightarrow \bar{u}$, $\hat{u} \in \Phi^{-1}(0)$.

Это свойство слабее обычной строгой дифференцируемости: если $\bar{u}$ — изолированное решение, то оно равносильно дифференцируемости Φ в точке $\bar{u}$.

Для системы Лагранжа это свойство выполняется при двукратной дифференцируемости f и h в изолированной стационарной точке $\bar{x}$.

Характеризация некритичности

Теорема

Пусть Φ строго дифференцируемо в решении $\bar{u}$ относительно множества решений.

Тогда решение $\bar{u}$ некритическое $\Leftrightarrow$ выполняется любое из следующих эквивалентных свойств:

- имеет место оценка

$$\text{dist}(u, \Phi^{-1}(0)) = O(\|\Phi(u)\|)$$

при $u \rightarrow \bar{u}$;

Характеризация некритичности

Теорема (завершение)

- для любого $w \in \mathbb{R}^q$ и любого решения $u(w)$ возмущенного уравнения

$$\Phi(u) = w,$$

достаточно близкого к $\bar{u}$, имеет место оценка

$$\text{dist}(u(w), \Phi^{-1}(0)) = O(\|w\|)$$

при $w \rightarrow 0$.

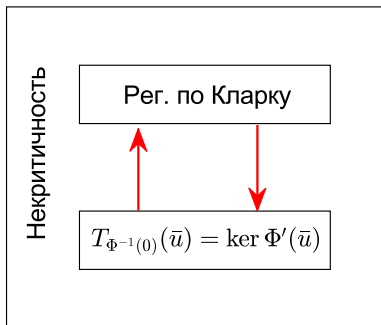
Характеризация некритичности

Если предполагать непрерывную дифференцируемость Φ вблизи $\bar{u}$, то из оценки расстояния $\Rightarrow \Phi^{-1}(0)$ — гладкое подмногообразие вблизи $\bar{u}$, и значит, автоматически регулярно по Кларку в точке $\bar{u}$.

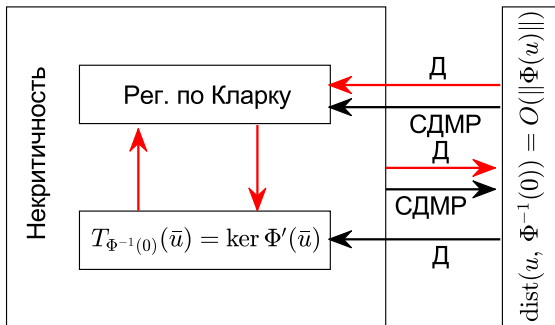
В используемых здесь требованиях гладкости множество решений может не быть гладким подмногообразием.

Все ингредиенты приведенной теоремы существенны.

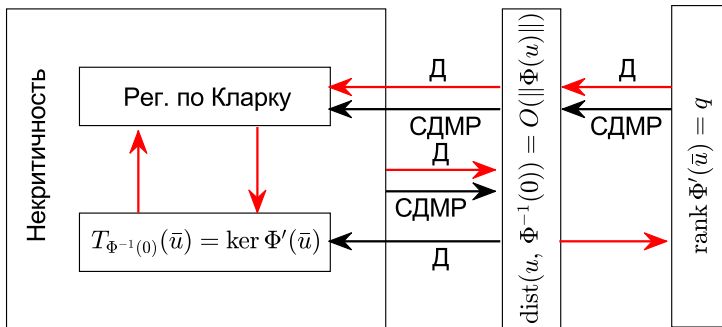
Соотношения между рассматриваемыми свойствами



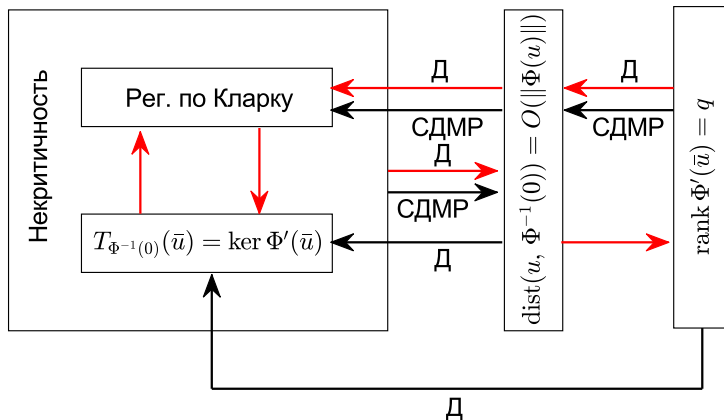
Соотношения между рассматриваемыми свойствами



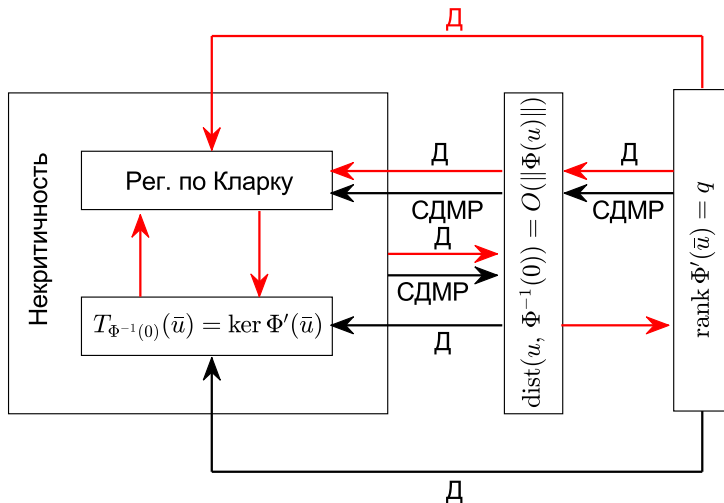
Соотношения между рассматриваемыми свойствами



Соотношения между рассматриваемыми свойствами



Соотношения между рассматриваемыми свойствами



Неустойчивость особых некритических решений

Предложение

Пусть Φ строго дифференцируемо в некритическом решении $\bar{u}$ относительно множества решений. Пусть существуют последовательности $\{w^k\} \subset \mathbb{R}^q \setminus \{0\}$ и $\{u^k\} \subset \mathbb{R}^p$ такие, что $\{w^k\} \rightarrow 0$, $\{u^k\} \rightarrow \bar{u}$, и для любого k выполняется $\Phi(u^k) = w^k$, а $\hat{u}^k$ является проекцией u^k на множество решений.

Тогда

$$\|u^k - \hat{u}^k\| = O(\|w^k\|)$$

при $k \rightarrow \infty$, и любая предельная точка (d, v) ограниченной последовательности $\{(w^k, u^k - \hat{u}^k)/\|w^k\|\}$ удовлетворяет равенству

$$\Phi'(\bar{u})v = d.$$

Неустойчивость особых некритических решений

При этом

$$d \in \operatorname{im} \Phi'(\bar{u}).$$

Если решение $\bar{u}$ особое, то правая часть — собственное линейное подпространство в $\mathbb{R}^q \Rightarrow$ это может выполняться только для очень специальных последовательностей $\{w^k\}$, а именно, сходящихся к 0 «вдоль» $\operatorname{im} \Phi'(\bar{u})$.

Особые некритические решения могут быть устойчивы только по отношению к очень специальным возмущениям.

2-регулярность

Дважды дифференцируемое в точке $\bar{u}$ отображение Φ называется 2-регулярным в этой точке по направлению $v \in \mathbb{R}^p$, если

$$\text{im } \Phi'(\bar{u}) + \Phi''(\bar{u})[v, \ker \Phi'(\bar{u})] = \mathbb{R}^q.$$

Это свойство:

- сохраняется при умножении v на любое ненулевое число, и, в частности, не зависит от длины v , а только от направления;
- устойчиво по отношению к малым возмущениям v ;
- выполняется при любом v (включая $v = 0$), если $\text{rank } \Phi'(\bar{u}) = q$, но может выполняться и при нарушении этого условия (с ненулевыми v).

2-регулярность

Ключевое предположение

Отображение Φ 2-регулярно в решении $\bar{u}$ по некоторому направлению $\bar{v} \in \ker \Phi'(\bar{u})$.

Даже если $p = q$, это предположение может выполняться в особых (и даже неизолированных) критических решениях.

При этом, если $p = q$, то это предположение не может выполняться в особых некритических решениях: при его выполнении нарушается равенство $T_{\Phi^{-1}(0)}(\bar{u}) = \ker \Phi'(\bar{u})$.

2-регулярность

Действительно, если оно выполняется, то для любого $v \in \ker \Phi'(\bar{u}) = T_{\Phi^{-1}(0)}(\bar{u})$ имеет место

$$\Phi''(\bar{u})[v, v] \in \operatorname{im} \Phi'(\bar{u}).$$

При $p = q$ отображение Φ 2-регулярно в точке $\bar{u}$ по направлению $v \Leftrightarrow$

$$\dim \Phi''(\bar{u})[v, \ker \Phi'(\bar{u})] = \dim \ker \Phi'(\bar{u}),$$

$$\operatorname{im} \Phi'(\bar{u}) \cap \Phi''(\bar{u})[v, \ker \Phi'(\bar{u})] = \{0\}.$$

Если $\Phi''(\bar{u})[v, v] = 0$, то нарушается первое, а в противном случае второе.

Устойчивость критических решений

Теорема

Пусть вторая производная Φ непрерывна в решении $\bar{u}$. Пусть выполнено ключевое предположение.

Тогда найдутся $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что для любого

$$w \in B(0, \varepsilon) \cap \text{cone } B(\Phi''(\bar{u})[\bar{v}, \bar{v}], \delta)$$

возмущенное уравнение $\Phi(u) = w$ имеет решение $u(w)$, удовлетворяющее оценке

$$\gamma \|u(w) - \bar{u}\| \leq \|w\|^{1/2}.$$

Множество возмущений w , относительно которых устойчиво критическое решение, «широкое» (не является асимптотически тощим).

Метод Ньютона

С этого момента пусть $p = q$.

Для текущего приближения $u^k \in \mathbb{R}^p$

Итерация

Вычисляем u^{k+1} как решение системы линейных уравнений

$$\Phi(u^k) + \Phi'(u^k)(u - u^k) = 0.$$

Притяжение к критическим решениям

Теорема

Пусть вторая производная Φ непрерывна в решении $\bar{u}$. Пусть выполнено ключевое предположение.

Тогда существует **звездное относительно $\bar{u}$ и асимптотически плотное в этой точке множество** $U \subset \mathbb{R}^p$, такое, что любая начальная точка $u^0 \in U \setminus \{\bar{u}\}$ однозначно определяет траекторию $\{u^k\}$ метода Ньютона, $u^k \neq \bar{u}$ для всех k , последовательность $\{u^k\}$ сходится к $\bar{u}$, и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u^{k+1} - \bar{u}\|}{\|u^k - \bar{u}\|} = \frac{1}{2}.$$

Ньютоновские траектории сходятся к критическому решению из «широкого» множества начальных точек.

Постановка задачи

Задача оптимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad h(x) = 0,$$

где $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ — дважды дифференцируемые.

Система Лагранжа для стационарных точек и множителей

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda) = 0, \quad h(x) = 0,$$

где $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle.$$

Система Лагранжа

Это уравнение

$$\Phi(u) = 0,$$

в котором $p = q = n + l$, $u = (x, \lambda)$,

$$\Phi(u) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda), h(x) \right).$$

Критические решения системы Лагранжа

Если $\bar{x}$ — стационарная точка, то $\Phi^{-1}(0)$ содержит аффинное многообразие $S = \{\bar{x}\} \times \Lambda(\bar{x}) \Rightarrow$ для любого $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{x})$

$$T_S(\bar{u}) \subset T_{\Phi^{-1}(0)}(\bar{u}),$$

где $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{\lambda})$. При этом

$$\dim S = \dim \ker(h'(\bar{x}))^\top = l - \text{rank } h'(\bar{x})$$

$\Rightarrow \dim S > 0 \Leftrightarrow$ нарушается условие регулярности ограничений
 $\text{rank } h'(\bar{x}) = l$.

Критические решения системы Лагранжа

Поскольку

$$\Phi'(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, \lambda) & (h'(x))^T \\ h'(x) & 0 \end{pmatrix},$$

имеем

$$\ker \Phi'(\bar{u}) = \left\{ (\xi, \eta) \in Q(\bar{x}, \bar{\lambda}) \times \mathbb{R}' \mid (h'(\bar{x}))^T \eta = -\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \xi \right\},$$

где

$$Q(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \left\{ \xi \in \ker h'(\bar{x}) \mid \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \xi \in \operatorname{im} (h'(\bar{x}))^T \right\}.$$

Критические решения системы Лагранжа

Тогда

$$\dim \ker \Phi'(\bar{u}) = \dim Q(\bar{x}, \bar{\lambda}) + \dim \ker(h'(\bar{x}))^T$$

$$\Rightarrow \dim \ker \Phi'(\bar{u}) > \dim S \Leftrightarrow Q(\bar{x}, \bar{\lambda}) \neq \{0\}.$$

Предложение

Пусть $\bar{x}$ — стационарная точка, а $\bar{\lambda}$ — отвечающий ей множитель Лагранжа.

Если множитель $\bar{\lambda}$ не критический, то $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{\lambda})$ — не критическое решение системы Лагранжа.

Если $\bar{x}$ — **изолированная стационарная точка**, то $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{\lambda})$ является критическим решением системы Лагранжа $\Leftrightarrow$ множитель $\bar{\lambda}$ критический.

Когда выполняется ключевое предположение

о существовании $\bar{v} = (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \ker \Phi'(\bar{u})$ такого, что Φ 2-регулярно в точке $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{\lambda})$ по направлению $\bar{v}$?

Пусть $\dim Q(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 1$, т.е.,

- $Q(\bar{x}, \bar{\lambda})$ — прямая, натянутая на некоторый вектор $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, т.е.,
- $H(\bar{\lambda})$ имеет нулевое собственное значение геометрической кратности 1, т.е.,
- $\bar{\lambda}$ — критический множитель *порядка 1*.

Когда выполняется ключевое предположение

Предложение

Пусть f и h трижды дифференцируемы в стационарной точке $\bar{x}$ с отвечающим ей множителем Лагранжа $\bar{\lambda}$. Пусть $Q(\bar{x}, \bar{\lambda})$ натянута на $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Если $\text{rank } h'(\bar{x}) = l - 1$, то $\ker \Phi'(\bar{u})$ содержит элементы вида $v = (\bar{\xi}, \eta)$ с некоторым $\eta \in \mathbb{R}^l$, и Φ 2-регулярно в точке $\bar{u}$ по любому такому направлению $\Leftrightarrow$

$$h''(\bar{x})[\bar{\xi}, \bar{\xi}] \notin \text{im } h'(\bar{x}).$$

Если $\text{rank } h'(\bar{x}) \leq l - 2$, то Φ не может быть 2-регулярным в точке $\bar{u}$ ни по какому направлению $v \in \ker \Phi'(\bar{u})$.

Когда выполняется ключевое предположение

Мотивирующий пример (продолжение)

Для задачи

$$x^2 \rightarrow \min, \quad x^2 = 0,$$

система Лагранжа имеет вид

$$\Phi(u) = 0,$$

где $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(u) = (2x(1 + \lambda), x^2)$.

Здесь $l = 1$, $h'(0) = 0$, $\dim Q(0, -1) = 1$, и $h''(0) \neq 0 \Rightarrow \Phi$ 2-регулярно в точке $\bar{u} = (0, -1)$ по направлению $v = (\bar{\xi}, \eta) \in \ker \Phi'(\bar{u})$ для любых $\bar{\xi} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\eta \in \mathbb{R}$.

Когда выполняется ключевое предположение

Случай $\dim Q(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geq 2$ (т.е. когда множитель $\bar{\lambda}$ является критическим порядка > 1) открывает широкие возможности для выполнения ключевого предположения.

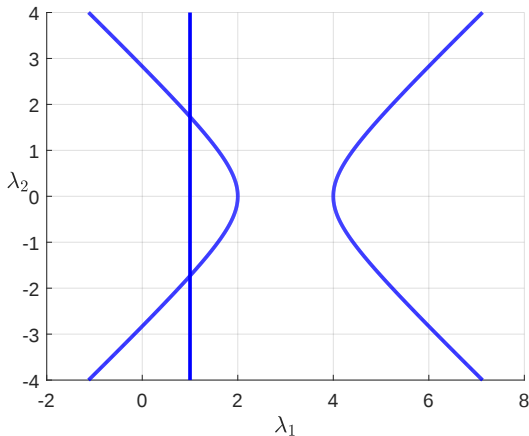
Пример

Для задачи

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 \rightarrow \min, \quad -\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 = 0, \quad x_1 x_3 = 0$$

единственным решением является $\bar{x} = 0$, $h'(0) = 0$, $\Lambda(0) = \mathbb{R}^2$.
Критическими являются множители λ , удовлетворяющие $\lambda_1 = 1$ или $(\lambda_1 - 3)^2 - \lambda_2^2 = 1$.

Критические множители



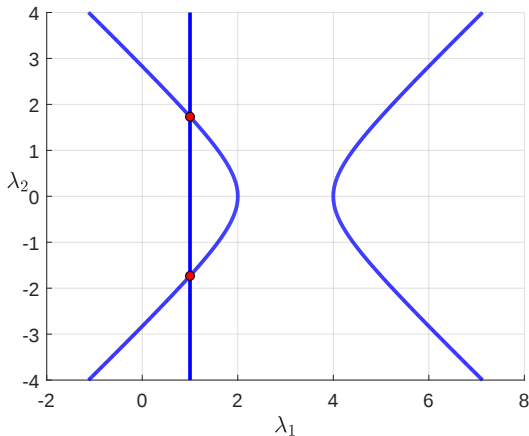
Критические множители порядка > 1

Пример (продолжение)

Все критические множители, кроме $\bar{\lambda} = (1, \pm\sqrt{3})$, удовлетворяют $\dim Q(0, \lambda) = 1 \Rightarrow$ ключевое предположение не выполняется ($h'(0) = 0$, $l = 2$).

При этом для $\bar{\lambda} = (1, \pm\sqrt{3})$ выполняется $\dim Q(0, \bar{\lambda}) = 2$.

Критические множители порядка 2



Критические множители порядка > 1

Случаи сходимости к $\bar{\lambda} = (1, \sqrt{3})$ (%)

RSP	LM	LP-N	sNLM	NLM
1	26	42	4	65
0.5	27	45	7	75
0.25	29	48	15	82
0.1	33	55	26	91
0.01	60	82	59	97

Направления дальнейшего развития

- Более общие классы вариационных задач: уравнения с ограничениями, системы включающие неравенства, коплементарные системы без условия строгой дополненности, ...
- Дальнейшее изучение эффекта притяжения методов к критическим решениям: другие классы методов, случаи нарушения ключевого предположения, ...
- Связи между эффектом притяжения и устойчивостью критических решений.
- Средства преодоления негативного влияния критических решений на поведение методов.

izmaf@cs.msu.ru