

Эпидемиологические модели и их дискретные аналоги

Эшмаматова Дилфузада Бахромовна

Ташкентский Государственный Транспортный Университет

27.01.2022

Человеку присуще болеть, и на протяжении всей истории существования человечества идет борьба между людьми и инфекционными болезнями. Вспомним оспу, холеру, чуму, проказу, сыпной тиф, малярию, бешенство, дифтерию, сифилис, туберкулез.

В последние 20-25 лет особое внимание к себе привлекают гриппы различных штаммов, но ни что не сравнится с развитием и мутациями COVID-19.

Напомним, что эпидемия – это прогрессирующее распространение заболевания среди людей, значительно превышающее обычный регистрируемый на данной территории уровень заболеваемости и способное стать причиной чрезвычайной ситуации. А пандемия – это необычно сильная эпидемия, распространившаяся на территории нескольких стран, континентов, т.е. высшая степень эпидемиологического процесса.

Математические методы для изучения заболеваний были впервые применены в 1766 году Даниэлем Бернулли. С их помощью он оценил эффективность различных способов прививки против оспы.

В 1840 году Уильям Фарр описал кривой нормального распределения данные по смертности от оспы в Англии и Уэльсе за период с 1837 по 1839 год. Этот метод позже был развит Джоном Браунли, опубликовавшим в 1906 году статью “Статистический подход к иммунной защите: теория эпидемий” ², в которой он сопоставлял ряды эпидемиологических данных на основе распределения Пирсона.

Труды этих и других ученых, наряду с более поздними работами В.О. Кермака и А.Г. Маккендрика, послужили теоретической основой для дальнейших исследований в области математического моделирования эпидемий.

² John Brownlee, M.D. Statistical Studies in Immunity: The Theory of an Epidemic. Proceedings of Royal Society of Edinburgh. 26.1, 1906. 484-521 р.

Практика показывает, что в разных странах одна и та же болезнь протекает с разными показателями. При более-менее общей картине течении болезни, она отличается по скорости роста или же спада. Изучение эпидемиологических моделей проводится аппаратами различных разделов математики, таких как статистика, теория вероятностей, дифференциальные уравнения.

На сегодняшний день эпидемиологические ситуации более подробно изучены методами дифференциальных уравнений. Однако, результаты последних нескольких работ по COVID-19 показывают, что системы обыкновенных дифференциальных уравнений не совсем соответствуют реальной ситуации. Кроме этого есть ряд работ, в которых вместо обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются производные дробного порядка.

Мы рассматриваем дискретные варианты эпидемиологических моделей, так как на наш взгляд дискретные аналоги более адекватно соответствуют реальной ситуации.

В 1927 году В.О. Кермак и А.Г. Маккендрек предложили концепцию **компартментальной модели**, которая получила название SIR.

Рассмотрим инфекционное заболевание, которое распространяется среди особей, при этом в случае излечения приобретается иммунитет. Случай смертельного исхода также учитывается.

Предположим, что в любой момент времени любая особь может принадлежать к одной из трех категорий:

- здоровые, но восприимчивые к инфекции особи – группа S (susceptible individuals);
- инфицированные и склонные к заражению других особей – группа I (infected individuals);
- выздоровевшие и имеющие (временно или постоянно) иммунитет к болезни особи – группа R (recovered individuals).

Инфекция может возникнуть в результате контакта инфекционных и восприимчивых особей. Основной вопрос заключается в том, как меняется доля инфицированных и доля восприимчивых в популяции.

В каждом классе количество особей обозначается через $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$, и модель SIR имеет следующий вид: ^a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -rSI, \\ \frac{dI}{dt} = rSI - aI, \\ \frac{dR}{dt} = aI, \end{array} \right.$$

где $r > 0$ – скорость инфицирования, $a > 0$ – скорость убыли класса инфицированных. Здесь различные классы равномерно перемешаны, т.е. каждая пара особей имеет одинаковую вероятность вступить в контакт друг с другом. Отметим, что это допущение не выполняется в большинстве случаев для болезней, передающихся половым путем.

^aW.O. Kermack and A.G. McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proc. R. Soc. Lond. 115(1927). 700-721.

Требуется найти только неотрицательные решения для неизвестных функций $S(t)$, $I(t)$ и $R(t)$, для которых выполняется условие:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow S(t) + I(t) + R(t) = N,$$

здесь N – общая численность популяции.

Введем начальные условия:

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = 0.$$

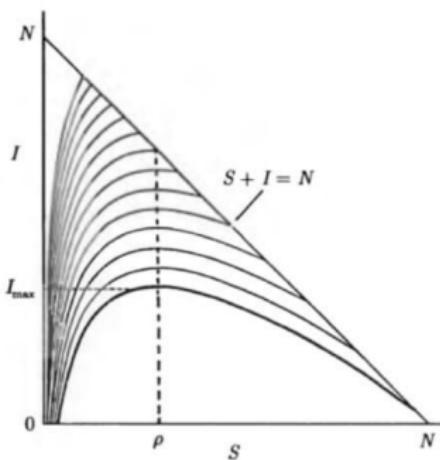
В любой эпидемиологической ситуации встает основной вопрос: будет ли распространяться инфекция или нет при известных параметрах r , a , S_0 и при исходном количестве инфицированного населения I_0 ? Если же она будет распространяться, как эта инфекция будет развиваться во времени, и когда она пойдет на спад?

Из второго уравнения системы получаем:

$$\left[\frac{dI}{dt} \right]_{t=0} = I_0(rS_0 - a),$$

отсюда следует, что либо $S_0 > \frac{a}{r} = \rho$, либо $S_0 < \frac{a}{r} = \rho$.

Если $I(t) < I_0$ при $t \rightarrow \infty$, тогда инфекция постепенно исчезает, если же $S_0 > \rho$, тогда функция $I(t)$ возрастает, т.е. эпидемия разгорается, если $S_0 < \rho$, тогда эпидемия идет на спад.



Кривые определяются начальными условиями. При $R(0) = 0$ все траектории начинаются на линии $S + I = N$ и остаются в пределах треугольника $0 < S + I < N$ на всем промежутке времени. Формально эпидемиологическая ситуация существует, если $I(t) > I_0$ для любого $t > 0$, это происходит всегда, когда $S_0 > \rho$ и $I_0 > 0$.

Пусть $S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \subset R^m$.

В работах Р.Н.Ганиходжаева был введен канонический вид отображений Лотки-Вольтерра

$$x_k' = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где $a_{ki} = -a_{ik}$ и $|a_{ki}| \leq 1$.

Теорема.¹ Отображение $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$, определяемое (1), является гомеоморфизмом, а при $|a_{ki}| < 1$ при всех $k, i = \overline{1, m}$ будет диффеоморфизмом симплекса S^{m-1} .

Для $x^0 \in S^{m-1}$ последовательность $\{x^{(n)}\} \subset S^{m-1}$, определяемая рекуррентной формулой

$$x^{(n+1)} = Vx^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

называется траекторией, начинающейся из точки x^0 .

¹Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры. Математический сборник (1992), т183, с.129-141

Через $\omega(x^0) = \{x^0, x^{(1)}, \dots\}'$ обозначим множество всех предельных точек положительной траектории. Очевидно, $\omega(x^0)$ – непустое замкнутое и инвариантное подмножество S^{m-1} , т.е $V(\omega(x^0)) \subset \omega(x^0)$. Так как V – гомеоморфизм при $|a_{ki}| \leq 1$, тогда для любой внутренней точки $x^0 \in S^{m-1}$ симплекса существует отрицательная траектория

$$x^{(-n-1)} = V^{-1}(x^{(-n)}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Через $\alpha(x^0) = \{x^0, x^{-1}, \dots, x^{-n}, \dots\}'$ обозначим множество всех предельных точек отрицательной траектории.

Теорема.² Пусть $A = (a_{ki})$ – кососимметрическая матрица, тогда множества

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\} \neq \emptyset, \quad Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\} \neq \emptyset$$

состоят из неподвижных точек.

²Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A., Eshmamatova D.B. Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex. // Journal of Mathematical Sciences, March, 2020. Vol. 245. N 3. P. 398-402. (Scopus IF=0.28)

Дискретный аналог модели SIR имеет следующий вид:

$$V : \begin{cases} S' = S(1 - aI), \\ I' = I(1 + aS - bR), \\ R' = R(1 + bI). \end{cases} \quad (2)$$

Модель соответствует отображению Лотки-Вольтерра $V : S^2 \rightarrow S^2$:

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1(1 - a_{12}x_2), \\ x_2' = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3), \\ x_3' = x_3(1 + a_{23}x_1), \end{cases}$$

здесь все неизвестные x_i , $i = \overline{1, 3}$, в эпидемиологической лексике имеют следующий смысл:

x_1 — здоровые, но восприимчивые к инфекции особи, т.е. группа S ;

x_2 — инфицированные и склонные к заражению других особей, т.е. группа I ;

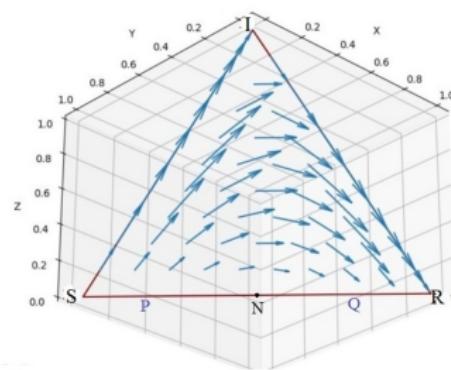
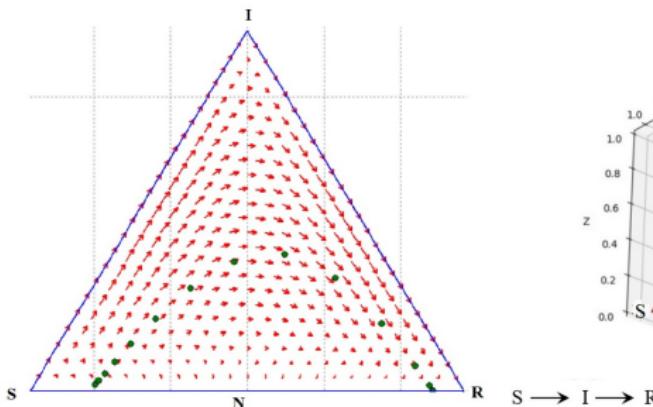
x_3 — выздоровевшие и имеющие иммунитет к болезни особи — группа R .

Теорема 1. Если дискретная модель SIR описывается системой (2), тогда на ребре смешанного графа Γ_{SR} существует нейтральная разделительная неподвижная точка $N\left(\frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b}\right)$. При этом

$$\text{либо } P = \left\{ \frac{b}{a+b} \leq S \leq 1 \right\}, \quad Q = \left\{ 0 \leq S \leq \frac{b}{a+b} \right\},$$

$$\text{либо } P = \left\{ 0 \leq R \leq \frac{a}{a+b} \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{a}{a+b} \leq R \leq 1 \right\}.$$

Т.е. если начальная точка лежит левее прямой, соединяющей вершину I и нейтральную точку N , тогда болезнь прогрессирует, но до определенного времени, а как только траектория перейдет эту прямую, тогда эпидемия идет на спад во множестве Q .



Рассмотрим произвольную начальную точку $x^0 \in S^2$ и ее траекторию. Так как V – гомеоморфизм, мы можем рассматривать как положительную, так и отрицательную траекторию произвольной начальной точки из симплекса. По рассматриваемой траектории мы можем рассмотреть течение болезни.

Теорема 2.

^a Множество предельных точек положительной траектории $\omega(x_0) \subset Q$, а множество предельных точек отрицательной траектории $\alpha(x_0) \subset P$. Т.е. история болезни начинается во множестве P , и заканчивается во множестве Q .

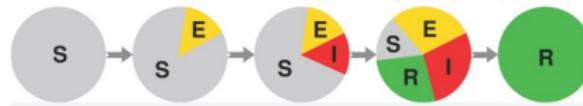
^aEshmamatova D.B. *Discrete analog of the model SIR* // AIP Conference Proceedings, 2022.

Иначе говоря, любая траектория в данном случае для произвольной начальной точки $x^0 \in S^2$ сходится, но сходится к точке, принадлежащей множеству Q , причем вся ситуация зависит от начальной точки.

Идеи, заложенные В.О. Кермаком и А.Г.Маккендриком, стали основой для дальнейших исследований в различных сферах, и на основе модели SIR была построена целая иерархия математических моделей эпидемиологических ситуаций вирусных заболеваний. Это – модели SI, SIS, SIRS, SEIR, SEIRS, MSIR, MSEIR и др.

Далее, перед тем как перейдем к рассмотрению дискретных аналогов моделей SEIR и SEIRS, в состав которых включается группа инфицированных особей, находящихся в стадии инкубационного (латентного) периода, – E (*exposed individuals in the stage of incubation (latent) period*), – приведем непрерывный случай этих моделей.

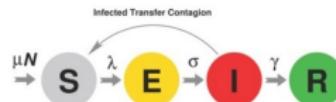
В последнее время эпидемиологическая модель SEIR интересуют многих математиков, так как считается, что ее можно использовать для выяснения условий распространения популярного заболевания XXI века COVID-19.



В 1993-1999 годах математики университета Альберты Michael Y. Li и J.S. Muldowney³ рассматривали модель SEIR.

Приведем одну из классических моделей SEIR, описываемых системой дифференциальных уравнений, связывающей параметры модели со скоростями $(\mu, \lambda, \sigma, \gamma)$, с которыми популяция мигрирует из одного компартмента в другой:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \lambda I S - \mu S, \\ \frac{dE}{dt} = \lambda I S - (\sigma + \mu)E, \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\gamma + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R. \end{cases}$$



³Michael Y. Li, James S. Muldowney, Global Stability for the SEIR Model in Epidemiology, Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, T6G 2GL Canada Received 3 March 1993

Перед тем как привести дискретные аналоги рассматриваемых моделей, рассмотрим отображение Лотки-Вольтерра, действующее в трехмерном симплексе.

Таджиева М.А. в своей диссертации дала классификацию отображениям Лотки-Вольтерра, действующим в трехмерном симплексе, с вырожденной и невырожденной кососимметрическими матрицами. В общем их оказалось 42 случая, среди которых 4 случая с невырожденными кососимметрическими матрицами были разобраны в работе ⁴. Среди остальных 38 случаев с вырожденной кососимметрической матрицей 8 случаев можно применить для изучения эпидемии заболеваний, передающихся воздушно-капиллярным путем; 4 случая – для вирусных болезней, которыми особи повторно не заболевают, это такие болезни, как корь, ветрянка, паротит и др. А также еще 4 случая подходят для вирусных заболеваний, которые имеют эффект повтора у особей, это – грипп, ОРВИ и COVID-19.

⁴Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories // Vladikavkaz. Mat. Zh. - 2006. V. 8, N 2. p. 12 - 28.

Рассмотрим одну из четырех случаев модели *SEIR*.

$$V : \begin{cases} S' = S(1 - aE - bI), \\ E' = E(1 + aS - dI - eR), \\ I' = I(1 + bS + dE - fR), \\ R' = R(1 + eE + fI). \end{cases} \quad (3)$$

Теорема 3.

^a Если в эпидемиологической ситуации существуют три перехода

$$S \rightarrow I \rightarrow R,$$

$$S \rightarrow E \rightarrow R,$$

$$S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R,$$

тогда для каждого из них выполняются следующие условия:

^aEshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. *Degenerate cases in Lotka-Volterra systems*// AIP Conference Proceedings, 2022.

1). $S \rightarrow I \rightarrow R$.

Это соответствуют ситуации на грани Γ_{SIR} . Здесь на ребре Γ_{SR} существует нейтральная точка $N_1\left(\frac{f}{b+f}, 0, \frac{b}{b+f}\right)$.

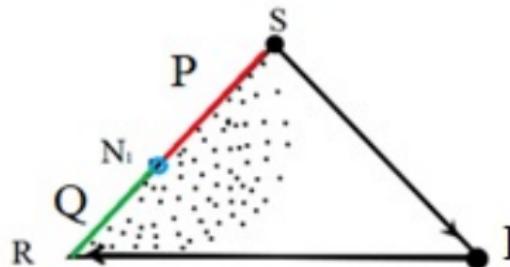
В этом случае либо

$$P = \left\{ \frac{f}{f+b} \leq S \leq 1 \right\}, \quad Q = \left\{ 0 \leq S \leq \frac{f}{f+b} \right\},$$

либо

$$P = \left\{ 0 \leq R \leq \frac{b}{b+f} \right\} \quad Q = \left\{ \frac{b}{b+f} \leq R \leq 1 \right\}.$$

Т.е. если начальная точка лежит левее прямой, соединяющую вершину I и нейтральную точку N_1 , тогда болезнь прогрессирует, но до определенного времени, а как только траектория перейдет эту прямую, тогда эпидемия идет на спад во множестве Q .



2).

$$S \rightarrow E \rightarrow R.$$

Этот переход соответствует тем особям, для которых болезнь не показывает себя явно, т.е. эта ситуация происходит на грани Γ_{SER} . Тогда на том же ребре Γ_{SR} существует нейтральная точка

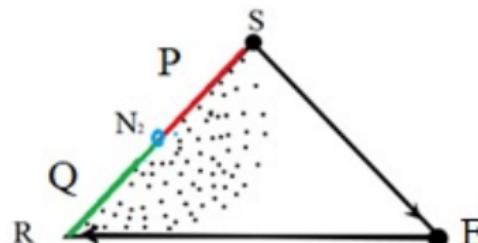
$N_2\left(\frac{e}{a+e}, 0, \frac{a}{a+e}\right)$. При этом либо

$$P = \left\{ \frac{e}{a+e} \leq S \leq 1 \right\}, \quad Q = \left\{ 0 \leq S \leq \frac{e}{a+e} \right\},$$

либо

$$P = \left\{ 0 \leq R \leq \frac{a}{a+e} \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{a}{a+e} \leq R \leq 1 \right\}.$$

Т.е. если начальная точка лежит левее прямой, соединяющей вершину E и нейтральную точку N_2 , тогда болезнь прогрессирует, но до определенного времени, а как только траектория перейдет эту прямую, тогда эпидемия идет на спад во множестве Q .



3). $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$. Эта ситуация происходит для тех особей, которые полностью переходят все группы.

Если $eb < af$, тогда либо

$$P = \left\{ \frac{f}{f+b} \leq S \leq 1 \right\}, \quad Q = \left\{ 0 \leq S \leq \frac{e}{a+e} \right\},$$

либо

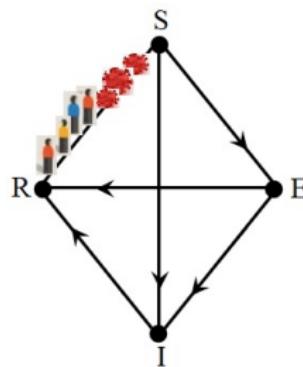
$$P = \left\{ 0 \leq R \leq \frac{b}{f+b} \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{a}{a+e} \leq R \leq 1 \right\}.$$

Если $eb > af$, тогда либо

$$P = \left\{ \frac{e}{a+e} \leq S \leq 1 \right\}, \quad Q = \left\{ 0 \leq S \leq \frac{f}{f+b} \right\},$$

либо

$$P = \left\{ 0 \leq R \leq \frac{a}{a+e} \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{b}{f+b} \leq R \leq 1 \right\}.$$



Следствие 1.

Если эпидемиологическая ситуация описывается дискретной динамической системой (2), тогда какой бы ни был переход из группы в группу, болезнь начинается и заканчивается на ребре Γ_{SR} . Границы начала и конца болезни зависят от коэффициентов перехода из группы в группу S, E, I, R , т.е. начало и конец эпидемии устойчивы относительно коэффициентов перехода a, e, b, f .

Перейдем к эпидемиологической модели *SEIRS* :

$$V : \begin{cases} S' = S(1 - aE + cR), \\ E' = I(1 + aS - dI), \\ I' = E(1 + dE - fR), \\ R' = R(1 - cS + fI). \end{cases}$$

Здесь существует только один переход особей из группы в группу, при этом картина предельного поведения траекторий зависит от значений коэффициентов, т.е. от значения включенного в скобку в выражении определителя. В итоге получаем следующие три случая:

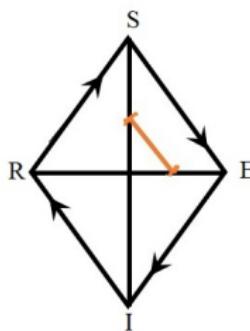
- 1) $af = cd$,
- 2) $af < cd$,
- 3) $af > cd$.

Теорема 4.

^a Если коэффициенты отображения V удовлетворяют условию $af = cd$, тогда множества P и Q совпадают и состоят из отрезка:

$$P = Q = \left\{ \left(\frac{d\alpha}{a+d}; \frac{c(1-\alpha)}{a+c}; \frac{a\alpha}{a+d}; \frac{a(1-\alpha)}{a+c} \right), 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}.$$

^aEshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. *Degenerate cases in Lotka-Volterra systems*// AIP Conference Proceedings, 2022.



Эпидемиологической ситуации, описывающей такой случай, не существует.

Теперь перейдем ко второму случаю: $af < cd$.

Теорема 5.

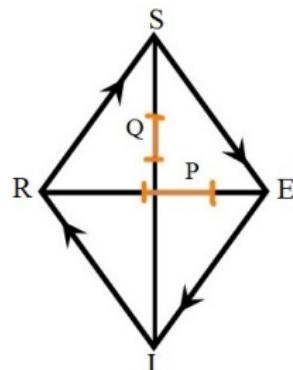
^a Если коэффициенты отображения V удовлетворяют условию $af < cd$, тогда болезнь начинается на одном из множеств

$$P = \left\{ \frac{a}{a+c} \leq R \leq \frac{d}{d+f} \right\}, \quad P = \left\{ \frac{f}{d+f} \leq E \leq \frac{c}{c+a} \right\},$$

и идет на спад на одном из множеств

$$Q = \left\{ \frac{f}{f+c} \leq S \leq \frac{d}{d+a} \right\}, \quad Q = \left\{ \frac{a}{a+d} \leq I \leq \frac{c}{c+f} \right\}.$$

^aEshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. *Degenerate cases in Lotka-Volterra systems*// AIP Conference Proceedings, 2022.

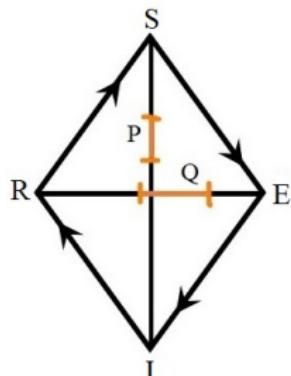


Наконец, рассмотрим третий случай: $af > cd$.

Теорема 6.

^a Если коэффициенты отображения V удовлетворяют условию $af > cd$, тогда разгар эпидемии происходит в одном из множеств $P = \left\{ \frac{d}{d+a} \leq S \leq \frac{f}{f+c} \right\}$, $P = \left\{ \frac{c}{f+c} \leq I \leq \frac{a}{a+d} \right\}$, и спад эпидемии происходит в одном из множеств $Q = \left\{ \frac{c}{c+a} \leq E \leq \frac{f}{f+d} \right\}$, $Q = \left\{ \frac{d}{f+d} \leq R \leq \frac{a}{a+c} \right\}$.

^aEshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. *Degenerate cases in Lotka-Volterra systems*// AIP Conference Proceedings, 2022.



Описание дискретной модели заболеваний, передающихся половым путем

В монографии⁵ рассмотрена модель заболеваний, передающихся половым путем (ЗПП). Эти болезни обладают специфическими характеристиками, не свойственными другим инфекциям. Одно из отличий ЗПП является распространение среди сексуально активной прослойки населения.

Следующее отличие – носитель часто не проявляет явных симптомов до поздних стадий заболевания.

Третье важное отличие – ЗПП не приводят к формированию приобретенного иммунитета после выздоровления от инфекции.

Предположим, что популяция состоит из двух взаимодействующих классов, мужчин и женщин, среди которых распространены беспорядочные половые связи. Для простоты рассмотрим только гетеросексуальные отношения.

⁵Murray J.D. Mathematical biology. Third Edition. Springer. 2009. p.776.

В монографии Ж.Д. Мюррея использована расширенная простая модель, и сексуально активная мужская популяция разделена на следующие группы:

S – восприимчивые,

I – инфицированные,

R – устранные от болезни мужчины.

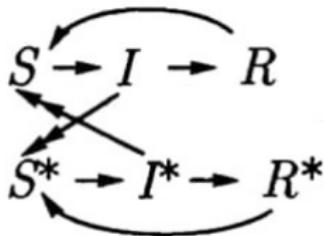
Соответственно активная женская популяция разделена следующие группы:

S^* – восприимчивые,

I^* – инфицированные,

R^* – устранные от болезни женщины.

В работе не учтены переходы из устранных классов в восприимчивый, динамика инфекции описана следующей схемой:



Предполагается, что как только инфицированные выздоравливают, они возвращаются в восприимчивый класс, поэтому считается, что

$$S(t) + I(t) = N, \quad S^* + I^* = N^*,$$

и модель имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -rSI^* + aI, \\ \frac{dI}{dt} = rSI^* - aI, \\ \frac{dS^*}{dt} = -r^*S^*I^* + a^*I^*, \\ \frac{dI^*}{dt} = r^*S^*I^* - a^*I^*. \end{cases}$$

Здесь особь из группы I^* заражает особь из группы S , и особь из группы I заражает особь из группы S^* .

Перейдем к описанию дискретной модели. Пусть отображения Лотки-Вольтерра V_1 и V_2 , действующие в S^2 , имеют следующий вид:

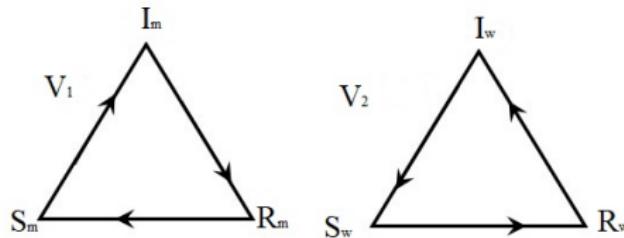
$$V_1 : \begin{cases} x_1' = x_1(1 - x_2 + x_3), \\ x_2' = x_2(1 + x_1 - x_3), \\ x_3' = x_3(1 - x_1 + x_2). \end{cases} \quad V_2 : \begin{cases} x_1' = x_1(1 + x_2 - x_3), \\ x_2' = x_2(1 - x_1 + x_3), \\ x_3' = x_3(1 + x_1 - x_2). \end{cases}$$

Переведем в эпидемиологический смысл:

$$V_1 : \begin{cases} S_m' = S_m(1 - I_m + R_m), \\ I_m' = I_m(1 + S_m - R_m), \\ R_m' = R_m(1 - S_m + I_m). \end{cases} \quad V_2 : \begin{cases} S_w' = S_w(1 + I_w - R_w), \\ I_w' = I_w(1 - S_w + R_w), \\ R_w' = R_w(1 + S_w - I_w). \end{cases}$$

Здесь V_1 определяет сексуально активную часть мужской популяции, S_m – восприимчивый, I_m – инфицированный, R_m – устранный от болезни слои мужской популяции;

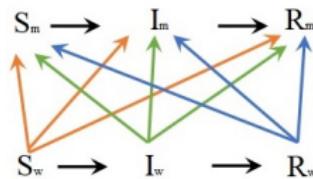
V_2 определяет сексуально активную часть женской популяции, S_w – восприимчивый, I_w – инфицированный, R_w – устранный от болезни слои женской популяции.



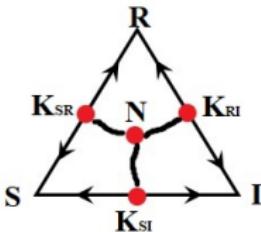
Рассмотрим композицию двух операторов Лотки-Вольтерра $V_1 \circ V_2$

$$V_1 \circ V_2 : \begin{cases} S'_m = S_w(1 + f_1(I_w, R_w)), \\ I'_m = I_w(1 + f_2(S_w, R_w)), \\ R'_m = R_w(1 + f_3(S_w, I_w)). \end{cases}$$

Здесь f_1, f_2, f_3 многочлены третьей степени от S_w, I_w, R_w , удовлетворяющие условию $S_w f_1 + I_w f_2 + R_w f_3 \equiv 0$.



В итоге $V_1 \circ V_2$ мы получим следующую карту неподвижных точек:



Композиция $V_1 \circ V_2$ имеет следующие неподвижные точки:

- 1) все вершины симплекса e_1, e_2, e_3 ;
- 2) на каждом ребре – по одной точке:

$$K_{IR}\left(0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) \in \Gamma_{IR},$$

$$K_{SR}\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; 0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \in \Gamma_{SR},$$

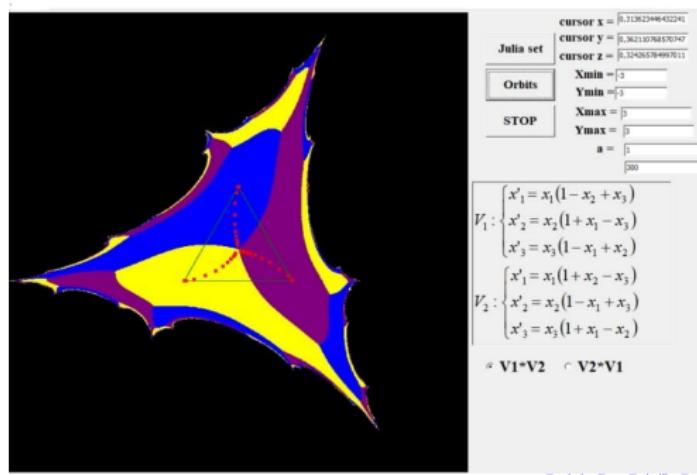
$$K_{SI}\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; 0\right) \in \Gamma_{SI}.$$

- 3) во внутренности симплекса – точка $N\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, которая является внутренней неподвижной точкой для отображений V_1 и V_2 .

Теорема 7.

Для композиции $V_1 \circ V_2$

- все вершины симплекса e_1, e_2, e_3 являются притягивающими неподвижными точками;
- все неподвижные точки, принадлежащие боковым ребрам, – седловые неподвижные точки;
- внутренность симплекса также имеет отталкивающую неподвижную точку, которая разделяет траектории внутри симплекса на три части.

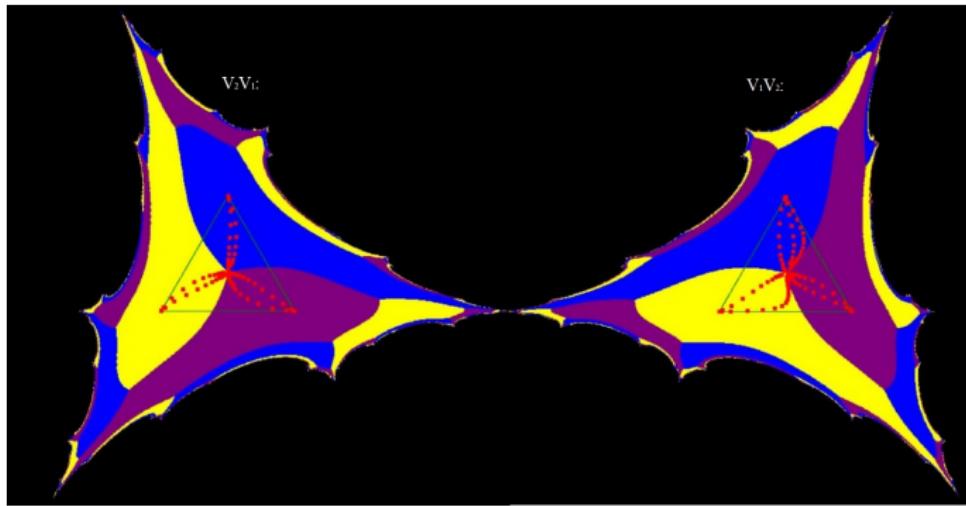


...

Теорема 8.

Для композиций $V_1 \circ V_2$ и $V_2 \circ V_1$

- сохраняется внутренняя неподвижная точка $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;
- боковые ребра имеют неподвижные точки, которые симметричны относительно центровой неподвижной точки.



Следствие 2.

В каждой из двух композиций $V_1 \circ V_2$ и $V_2 \circ V_1$ внутри симплекса существуют 3 кривые, являющиеся разделительными:

для $V_1 \circ V_2$ – $\widetilde{NC}_1, \widetilde{NC}_2, \widetilde{NC}_3$, при этом:

- \widetilde{NC}_1 и \widetilde{NC}_3 разделяют инфицированное население от восприимчивых и выздоровевших;

- \widetilde{NC}_2 и \widetilde{NC}_1 разделяют выздоровевшее население от восприимчивых и инфицированных;

- \widetilde{NC}_2 и \widetilde{NC}_3 разделяют восприимчивое население от инфицированных и выздоровевших.

Для композиции $V_2 \circ V_1$ существуют такие же разделительные кривые $\widetilde{NC}'_1, \widetilde{NC}'_2, \widetilde{NC}'_3$.

Точнее сказать, кривые $\widetilde{NC}_2, \widetilde{NC}_1, \widetilde{NC}_3, \widetilde{NC}'_1, \widetilde{NC}'_2, \widetilde{NC}'_3$ выполняют роль сепаратрис.

Напомним, что сепаратриса – эта кривая, начинающаяся или заканчивающаяся в точке седлового состояния.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Статьи

1. Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B. *Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories* // Vladikavkaz. Mat. Zh. № 8(2), стр.12-28 (2006).
2. Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A., Eshmamatova D.B. *Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex* // Journal of Mathematical Sciences, March, 2020. Vol. 245. № 3. P. 398-402. (Scopus. IF=0.28).
3. Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N. *Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1}* // AIP Conference Proceedings 2365, 060009 (2021);
<https://doi.org/10.1063/5.0057303>
4. D.B.Eshmamatova., R.N.Ganikhodzhaev., M.A.Tadzhieva. *Dynamics of Lotka-Volterra quadratic mappings with degenerate skew-symmetric matrix (the case of small dimensions)* // Uzbek Mathematical Journal, 2022. № 1.

5. Таджиева М.А., Эшмаматова Д.Б., Эшниезов А.И., Ганиходжаев Р.Н. *Спектр якобиана в неподвижных точках отображений Лотки-Вольтерра действующих в S^4 с однородным турниром и матрицей общего положения* // Бюллетень Института математики 2021. Vol. 4, № 3. С. 91-96.
6. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б., Таджиева М.А. *Квадратичные стохастические операторы вольтерровского типа с однородным турниром* // Современная математика. Фундаментальные направления. (печать) (STEMM).
7. Эшмаматова Д.Б. *Discrete analog of the SIR model* // AIP Proceeding Series. (печать)
8. D.B.Eshmamatova., R.N.Ganikhodzhaev., M.A.Tadzhieva. *Degenerate cases in Lotka-Volterra systems* // AIP Proceeding Series. (печать)
9. Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N., Таджиева М.А. *Критерии существования внутренних неподвижных точек дискретных динамических систем Лотки-Вольтерра с однородными турнирами* // Фундаментальная и прикладная математика.(печать).

10. Эшмаматова Д.Б., Ганиходжаев Р.Н., Таджиева М.А. *Однородные турниры и дискретные динамические системы* *Лотки-Вольтерра* // Математический Сборник журнал.(печать).
11. Эшмаматова Д.Б., Ganikhodzhaev R.N., Таджиева М.А. *Criteria for the existence of internal fixed points of Lotka-Volterra quadratic stochastic mappings with homogeneous tournaments acting in an $(m-1)$ -dimensional simplex* // Global and Stochastic Analysis (GSA).(печать)