Введение в алгебраическую логику: 1
— краткий экскурс в FOCL —

Станислав Олегович Сперанский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
(МЦМУ МИАН)

Весна 2022

Структуры

Под сигнатурой понимают четвёрку вида

$$\sigma = \langle \mathrm{Const}_\sigma, \mathrm{Func}_\sigma, \mathrm{Pred}_\sigma, \mathrm{arity}_\sigma \rangle,$$

где Const_σ, Func_σ, Pred_σ — попарно непересекающиеся множества, а arity_σ — функция из $\mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Pred}_\sigma$ в $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Элементы Const_σ, Func_σ и Pred_σ называются соответственно константными, функциональными и предикатными символами σ.

Для данного символа $\varepsilon \in \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Pred}_\sigma$ число $\mathrm{arity}_\sigma(\varepsilon)$ называют местностью ε, или арностью ε, или его валентностью.

Когда из контекста ясно, о какой сигнатуре σ идёт речь, индекс $\cdot_\sigma$ может, разумеется, опускаться.

В дальнейшем при записи сигнатур нами будет допускаться определённая свобода. Так, если

$$\mathrm{Const}_\sigma = \{c_1, \ldots, c_i\},$$
$$\mathrm{Func}_\sigma = \{f_1, \ldots, f_j\} \quad \text{и} \quad \mathrm{Pred}_\sigma = \{P_1, \ldots, P_k\},$$

то σ удобно представить как

$$\langle c_1, \ldots, c_i; f_1^{n_1}, \ldots, f_j^{n_j}; P_1^{m_1}, \ldots, P_k^{m_k} \rangle,$$

где n_1, ..., n_i и m_1, ..., m_j — местности соответственно f_1, ..., f_j и P_1, ..., P_k.

Пример

Сигнатурой упорядоченных колец является $\langle 0, 1; +^2, -^1, \cdot^2; <^2, =^2 \rangle$.

Под σ-структурой понимают пару вида

$$\mathfrak{A} = \langle A, I_{\mathfrak{A}} \rangle,$$

где A — непустое множество, а $I_{\mathfrak{A}}$ — функция с областью определения $\mathrm{Const}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Pred}_\sigma$ такая, что:

- для любого $c \in \mathrm{Const}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(c) \in A$;
- для любого n-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(f) : A^n \to A$;
- для любого m-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$ верно $I_{\mathfrak{A}}(P) \subseteq A^m$.

При этом A называется носителем $\mathfrak{A}$, или универсумом $\mathfrak{A}$, а $I_{\mathfrak{A}}$ — интерпретацией для σ в $\mathfrak{A}$. Для наглядности вместо $I_{\mathfrak{A}}(c)$, $I_{\mathfrak{A}}(f)$ и $I_{\mathfrak{A}}(P)$ пишут $c^{\mathfrak{A}}$, $f^{\mathfrak{A}}$ и $P^{\mathfrak{A}}$ соответственно.

Кроме того, если σ представляется как

$$\langle c_1, \ldots, c_i; f_1^{n_1}, \ldots, f_j^{n_j}; P_1^{m_1}, \ldots, P_k^{m_k} \rangle,$$

то $\mathfrak{A}$ удобно представить как

$$\langle A; c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_i^{\mathfrak{A}}; f_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, f_j^{\mathfrak{A}}; P_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, P_k^{\mathfrak{A}} \rangle.$$

Более того, для некоторых *стандартных* структур $\mathfrak{A}$ даже индекс $\cdot^{\mathfrak{A}}$ может опускаться, хоть это и чревато некоторой путаницей.

Замечание

Отныне будет предполагаться, что все рассматриваемые структуры нормальны, т.е. $=$ всегда интерпретируется обычным образом.

Язык кл. логики первого порядка, FOCL

Раз и навсегда зафиксируем какое-нибудь счётное множество

$$\mathrm{Var} \; := \; \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}.$$

Элементы Var мы будем называть предметными переменными, или просто переменными; в метаязыке их роль будут играть x, y, z, ... (возможно, с индексами).

Пусть σ — произв. сигнатура. Язык $\mathscr{L}_\sigma$ кл. логики первого порядка над σ состоит из эл-ов $\mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}_\sigma \cup \mathrm{Func}_\sigma \cup \mathrm{Pred}_\sigma$, а также:

- $\to$, $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ (символы связок);
- $\forall$ и $\exists$ (символы кванторов);
- (,) и , (вспомогательные символы).

Для каждой $x \in \mathrm{Var}$ слова $\forall x$ и $\exists x$ называют кванторами по x.

Обозначим через Term$_\sigma$ наим. множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $x \in \mathrm{Var}$, то $x \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $c \in \mathrm{Const}_\sigma$, то $c \in \mathrm{Term}_\sigma$;
- если $f \in \mathrm{Func}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma(f) = n$ и $\{t_1, \dots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$, то

$$f(t_1, \dots, t_n) \in \mathrm{Term}_\sigma.$$

Элементы Term$_\sigma$ называют σ-термами.

Пример

Пусть σ — сигнатура колец. Тогда

$$\cdot(+(x, 0), +(x, 1))$$

является σ-термом, который удобнее записать как $(x + 0) \cdot (x + 1)$.

Обозначим через At$_\sigma$ множество всех слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$ вида

$$P\,(t_1, \ldots, t_n),$$

где $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$, $\mathrm{arity}_\sigma\,(P) = n$ и $\{t_1, \ldots t_n\} \subseteq \mathrm{Term}_\sigma$. Такие выражения называют σ-атомами, или атомарными σ-формулами.

Обозначим через Form$_\sigma$ наим. множество слов в алфавите $\mathscr{L}_\sigma$, замкнутое относительно следующих порождающих правил:

- если $\Phi \in \mathrm{At}_\sigma$, то $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\{\Phi, \Psi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$ и $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$, то $(\Phi \circ \Psi) \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, то $\neg\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$;
- если $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $x \in \mathrm{Var}$, то $\{\forall x\,\Phi, \exists x\,\Phi\} \subseteq \mathrm{Form}_\sigma$.

Элементы Form$_\sigma$ называют σ-формулами.

Связанные и свободные переменные

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ и $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$.

Каждое вхождение $\mathrm{Q}x$ в Φ является началом вхождения некоторой подформулы, причём последнее определяется однозначно; его называют областью действия данного вхождения $\mathrm{Q}x$.

Вхождение x в Φ называется связанным, если оно входит в область действия какого-нибудь вхождения $\forall x$ или $\exists x$, и свободным иначе.

Далее, говорят, что x является свободной переменной в Φ, если у x есть хотя бы одно свободное вхождение в Φ.

Для удобства введём обозначение

$$\mathsf{FV}(\Phi) \;:=\; \left\{ z \in \mathsf{Var} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{у } z \text{ имеется хотя бы одно} \\ \text{свободное вхождение в } \Phi \end{array} \right\}.$$

Интуитивно элементы $\mathsf{FV}(\Phi)$ играют роль параметров для Φ. Запись $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$ указывает на то, что $\mathsf{FV}(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_\ell\}$.

Наконец, обозначим

$$\mathsf{Sent}_\sigma \;:=\; \{\Phi \in \mathsf{Form}_\sigma \mid \mathsf{FV}(\Phi) = \varnothing\}$$

Элементы Sent_σ называют σ-предложениями, реже — замкнутыми σ-формулами. Они могут выступать в качестве нелог. аксиом.

Замечание

Можно провести аналогию между кванторами и операторами суммирования, интегрирования и т.д. Так, в выражении

$$\int_0^x y \cdot z \, dy$$

оба вхождения y связаны; вместо них нельзя подставить конкретные числа. Вместе с тем x и z свободны и фактически играют роль параметров. Далее, в выражении

$$2y + \int_0^x y \cdot z \, dy$$

первое вхождение y является свободным, а другие два — нет. Интуитивно данное выражение равносильно

$$2y + \int_0^x u \cdot z \, du.$$

Семантика для кл. логики первого порядка

Под означиваниями переменных в $\mathfrak{A}$, или просто означиваниями в $\mathfrak{A}$, понимаются функции из Var в A. Каждое означивание ν в $\mathfrak{A}$ можно расширить до $\overline{\nu} : \mathrm{Term}_\sigma \to A$ естественным образом:

$$\begin{aligned} \overline{\nu}(x) &:= \nu(x); \\ \overline{\nu}(c) &:= c^{\mathfrak{A}}; \\ \overline{\nu}(f(t_1, \ldots, t_n)) &:= f^{\mathfrak{A}}(\overline{\nu}(t_1), \ldots, \overline{\nu}(t_n)). \end{aligned}$$

В дальнейшем для любых $x \in \mathrm{Var}$ и $a \in A$ через ν_a^x будет обозначаться означивание, получающееся из ν по правилу

$$\nu_a^x(y) := \begin{cases} \nu(y) & \text{если } y \neq x, \\ a & \text{если } y = x. \end{cases}$$

Определим $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ (читается как: Φ истинно в $\mathfrak{A}$ при ν) индукцией по построению Φ:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathfrak{A} \Vdash P\,(t_1, \ldots, t_n)\,[\nu] & \Longleftrightarrow & (\overline{\nu}\,(t_1), \ldots, \overline{\nu}\,(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}}; \\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \wedge \Theta\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \ \text{ и } \ \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \vee \Theta\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu] \ \text{ или } \ \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \neg\Psi\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \Psi \to \Theta\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \nVdash \Psi\,[\nu] \ \text{ или } \ \mathfrak{A} \Vdash \Theta\,[\nu]; \\
\mathfrak{A} \Vdash \exists x\,\Psi\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu_a^x] \ \text{ для некоторого } a \in A; \\
\mathfrak{A} \Vdash \forall x\,\Psi\,[\nu] & \Longleftrightarrow & \mathfrak{A} \Vdash \Psi\,[\nu_a^x] \ \text{ для всех } a \in A.
\end{array}
$$

Стоит отметить, что (не)верность $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ не зависит от того, какие значения ν сопоставляет элементам $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{FV}\,(\Phi)$.

Если Φ имеет вид $\Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$, т.е. $FV(\Phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_\ell\}$, то вместо $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu]$ нередко пишут

$$\mathfrak{A} \Vdash \Phi[x_1/\nu(x_1), \ldots, x_\ell/\nu(x_\ell)],$$

или же $\mathfrak{A} \Vdash \Phi[\nu(x_1), \ldots, \nu(x_\ell)]$. В частности, для $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$ обычно используется запись $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$.

Наконец, пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Говорят, что $\mathfrak{A}$ является моделью Γ, и пишут $\mathfrak{A} \Vdash \Gamma$, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi$ для всех $\Phi \in \Gamma$.

Пример

Пусть $\mathfrak{A}$ — кольцо. Если $\mathfrak{A} \Vdash \forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$, то $\mathfrak{A}$ коммутативно; если $\mathfrak{A} \Vdash \forall y (x \cdot y = y \cdot x)[\nu]$, то $\nu(x)$ коммутирует со всеми эл-ми.

Выполнимость и общезначимость

σ-Формулу Φ называют:

- выполнимой, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для некоторых $\mathfrak{A}$ и ν;
- общезначимой, если $\mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu]$ для всех $\mathfrak{A}$ и ν.

Здесь подразумевается, что $\mathfrak{A}$ бегает по σ-структурам, тогда как ν — по означиваниям в $\mathfrak{A}$. Очевидно,

$$\Phi \text{ общезначима} \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\Phi \text{ не выполнима.}$$

Теорема (Чёрча)

Проблема выполнимости для кл. логики первого порядка в сигнатуре арифметики алгоритмически неразрешима.

Замечание

Пусть $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$, и $x_1, \ldots, x_\ell$ суть в точности все элементы $\mathrm{FV}(\Phi)$ в порядке их появления в Φ. Обозначим

$$\widetilde{\forall}\Phi \ := \ \forall x_1 \ldots \forall x_\ell \, \Phi \quad \text{и} \quad \widetilde{\exists}\Phi \ := \ \exists x_1 \ldots \exists x_\ell \, \Phi.$$

Тогда $\widetilde{\forall}\Phi$ называют универсальным замыканием Φ, а $\widetilde{\exists}\Phi$ — экзистенциальным замыканием Φ. Ясно, что для каждой $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \ \text{ для всех } \nu; \\ \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\exists}\Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Phi\,[\nu] \ \text{ для некоторого } \nu. \end{aligned}$$

Стало быть, имеют место следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} \Phi \ \text{ выполнима} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\exists}\Phi \ \text{ для некоторой } \mathfrak{A}; \\ \Phi \ \text{ общезначима} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi \ \text{ для всех } \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Семантические следование и эквивалентность

Пусть $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$. Говорят, что Φ семантически следует из Γ, и пишут $\Gamma \vDash \Phi$, если для любой $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \Vdash \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\Phi,$$

Вместо $\varnothing \vDash \Phi$ обычно пишут $\vDash \Phi$. Очевидно,

$$\vDash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \ \text{общезначима.}$$

Наконец, формулы Φ и Ψ называют семантически эквивалентными, если $\vDash \Phi \leftrightarrow \Psi$; при этом пишут $\Phi \equiv \Psi$.

Выводимость в кл. логике первого порядка

Для $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathrm{Form}_\sigma$ запись $\Gamma \vdash \Phi$ означает, что сущ. вывод из Γ с заключением Φ. Вместо $\varnothing \vdash \Phi$ обычно пишут $\vdash \Phi$.

Замечание

Под выводом здесь понимается вывод в гильбертовском исчислении для кл. логики первого порядка; однако существуют и другие, порой куда более удобные типы исчислений.

Говорят, что: Φ опровержима в Γ, если $\Gamma \vdash \neg\Phi$; Φ независима от Γ, если $\Gamma \nvdash \Phi$ и $\Gamma \nvdash \neg\Phi$. Так, Коэн и Гёдель доказали, что:

- C независима от ZF, а CH — от ZFC;
- в частности, $\neg$C не опровержима в ZF, а $\neg$CH — в ZFC.

Теорема о сильной полноте $\vdash$

Для любых $\Gamma \subseteq \mathsf{Sent}_\sigma$ и $\Phi \in \mathsf{Form}_\sigma$,

$$\Gamma \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \models \Phi.$$

Пример

Пусть Γ — множество всех аксиом теории колец. Тогда $\Gamma \vdash \Phi$ равносильно тому, что Φ истинно во всех кольцах при всех означиваниях.

Алгебры и тождества

В случае, когда единственным предикатным символом в σ является $=$, σ-структуры обычно называют (абстрактными) σ-алгебрами, а σ-атомы — тождествами. Очевидно, всякое тождество имеет вид

$$t_1 = t_2,$$

где t_1 и t_2 суть σ-термы. Мы будем часто писать $\mathfrak{A} \Vdash t_1 = t_2$ вместо $\mathfrak{A} \Vdash \widetilde{\forall}\, t_1 = t_2$, отождествляя тождества с их ун. замыканиями.

Пример

Формально кольца — алгебры, а упорядоченные кольца — нет.

Многообразия

Мы будем говорить, что класс σ-алгебр $\mathcal{K}$ является многообразием, если существует $\Gamma \subseteq \mathrm{At}_\sigma$ такое, что

$$\mathcal{K} \;=\; \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \Vdash \Gamma\}.$$

Иными словами, многообразия суть в точности аксиоматизируемые тождествами классы алгебр.

Теорема (Биркгоффа о многообразиях)

Класс σ-алгебр является многообразием т.т.т., к. он замкнут относительно гомоморфных образов, подалгебр и прямых произведений.

Доказательство.

Будет, но попозже. $\square$