Доска доклада 9.02.2022

10 февраля 2022 г. 10:02

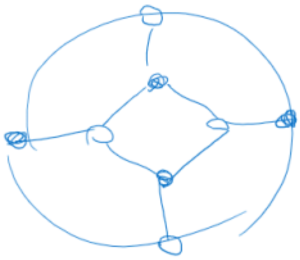
Электрические сети

1. Введение
   а. модель димеров, модель Изинга, модель электрических сетей
   б. Структурная инвариантность и уравнение тетраэдров Замолодчикова
2. Полностью неотрицательные грассманиан
   а. $E_{\geq 0}$ в модели димеров
   б. $OG_{\geq 0}$ в модели Изинга
   в. $LG_{\geq 0}$ в электрических сетях

Определение моделей

Модель димеров (совершенных паросочетаний)

Г - двудольный граф, $V_{in} \subset V$ множество внутренних вершин.



Соверш. паросочетанием называем $E' \subset E$, покрывает все $v \in V_{in}$, ребра не пересекаются (не имеют

$w: E \to \mathbb{R}$

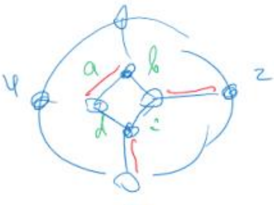
Статсумма модели $\Delta = \sum w(\Pi)$
П - соверш. паросоч.

$w(\Pi) = \prod_{e \in E'} w(e)$

Частичные статсуммы: $I \subset V \setminus V_{in}$

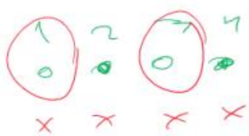
$\Delta_I = \sum_{\Pi: \text{"}\partial\Pi \subset I\text{"}} w(\Pi)$

"$\partial\Pi \subset I$" $\iff$ П не покрывает все белые вершины из I, покрывает все черные вершины из I.



$I = \{1, 2\}$

$I = \{1, 3\}$



$\Delta_{12} = a$ $\Delta_{23} = d$

$\Delta_{12} = a \qquad \Delta_{23} = d$

$\Delta_{13} = ac + bd \qquad \Delta_{24} = 1$

$\Delta_{14} = b \qquad \Delta_{34} = c$

$$\Delta_{12}\Delta_{34} - \Delta_{13}\Delta_{24} + \Delta_{14}\Delta_{23} = 0$$

<u>Теорема</u> (Постников, Таласка) $\{\Delta_I\}$ $\#I = k$ задаёт вложение пространства моделей димера в $Gr_{\geq}(k,n)$

<u>Модель Изинга</u>

$\Gamma,\ a: E \to \mathbb{R},\ \sigma: V \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\sigma_2 \quad \sigma_1 = \pm 1$

$\sigma_1 \overset{e}{—} \sigma_2$

$$Z = \sum_{\sigma} \prod_{e \in E} \left(1 + (a_e - 1)\delta(\sigma_e)\right)$$

$$\delta(\sigma_e) = \begin{cases} 1 & \text{если } \sigma_1 = \sigma_2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$P(\sigma) = \frac{\prod_e \left(1 + (a_e - 1)\delta(\sigma_e)\right)}{Z}$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle = \sum \sigma_i \sigma_j P(\sigma)$$

<u>Теорема</u> (Галашин, Пылявский)

$(\Gamma, a) \to OG_{\geq 0}(n, 2n)$, где n - число граничных точек

$\Omega = \{\langle \sigma_i \sigma_j \rangle\}$ $i,j \in V \setminus V_{in}$

$$\Omega = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \dots \\ m_{21} & m_{22} & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\rho\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m_{12} & -m_{12} & -m_{13} & m_{13} & m_{14} & -m_{14} & \dots \\ -m_{21} & m_{21} & \wedge & \wedge & m_{23} & -m_{23} & \dots & & \end{pmatrix}$$

$\Omega \to P\tilde{\Omega}$ — погружение пространства моделей Изинга в $OG_{\geq 0}(n, 2n)$

Опр $OG_{\geq}(n, 2n) = \{ M \in Mat_{n \times 2n} \mid \Delta_I \geq 0 \ \#I = n,$

$\Delta_I = \Delta_{[2n] \setminus I} \ \forall I \subseteq [2n] \ \#I = n \} / \sim$

$\Leftrightarrow \ g = (1, -1, 1, -1 \dots)$

Модель электрических сетей

$\Gamma, V_{in}, c : E \to \mathbb{R}^+$

$I(U) = M_R U$

M_R — матрица отклика

$$K = \begin{pmatrix} & & c_{ij} \\ & & \\ & & -\sum_{m \neq e} c_{em} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \quad M_R = A - B D^{-1} C$$

Модель Изинга и модель электрических сетей инвариантны относительно преобразования "звезда-треугольник".

Электрич. сети

$$xx' = x'y' + x'z' + y'z'$$

$\vdots$

Модель Изинга

$$xy = \frac{1+x'y'z'}{x'y'+z'}$$

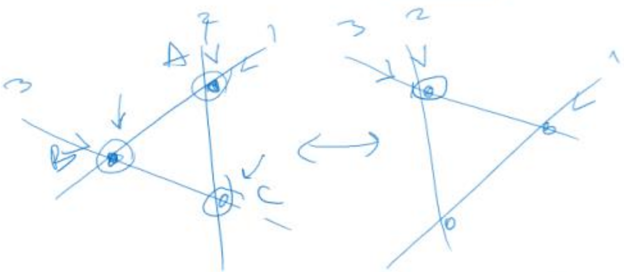
$\vdots$

Уравнение тетраэдров Замолодчикова

Уравнение Янга–Бакстера

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \in End(V^{\otimes 3})$$

$$\in Map(X^{\times 3})$$



$A < B$

$A < C \Rightarrow CBA$

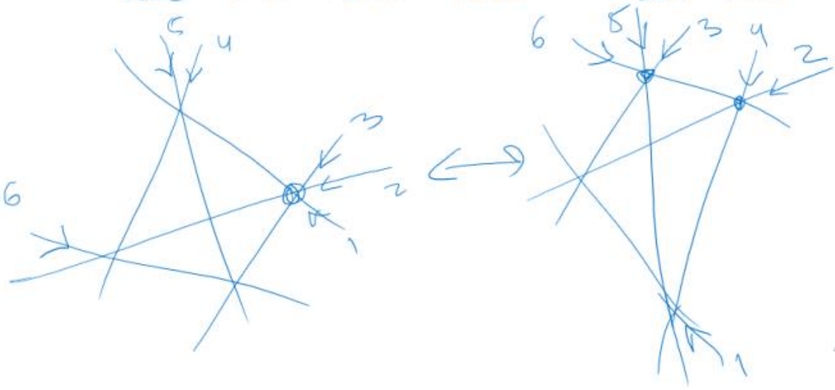
$B < C$

Уравнения n-симплексов

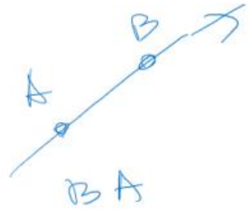
$n = 3$ Уравнение Замолодчикова

$\in End(V^{\otimes 6})$

$$\Phi_{123}\Phi_{145}\Phi_{246}\Phi_{356} = \Phi_{356}\Phi_{246}\Phi_{145}\Phi_{123}$$



$\in Map(X^{\times 6})$



Звезда-треуг (Электр. сети) $\Rightarrow$ решение TR

$$(**)\quad \begin{array}{ccc} x & & \dfrac{xy}{x+z+xyz} \\ y & \longrightarrow & x+z+xyz \\ z & & \dfrac{yz}{x+z+xyz} \end{array}$$

Связано с (*)

$a, b, c \to \frac{1}{a}, b, \frac{1}{c}$

$a' b' c' \to a', \frac{1}{b'}, c'$

(*) в $(a, b, c) \Leftrightarrow$ (**) в (x, y, z)

$$M_i(t) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} & & i+1 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & t & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$M_i(t)M_{i+1}(s)M_i(k) = M_{i+1}(k')M_i(s')M_{i+1}(t')$$

$k' \quad ks/k+t$

$s' = k+t$

$t' \quad st/k+t$

Неотрицательный лагранжиан грассманиан и электрические сети

$$(\Gamma, c), \quad M_R = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ & & \end{pmatrix}$$

$$\Omega(M) = \begin{pmatrix} x_{11} & 1 & -x_{12} & 0 & +x_{13} & \dots & (-1)^n \\ -x_{21} & 1 & x_{22} & 1 & \vdots & & \\ x_{31} & 0 & -x_{23} & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix} \quad n \times 2n$$

$$\operatorname{rk} \Omega(M) = n-1$$

Теорема $\Omega(M)$ – точка $G_{\geq}(n-1, 2n)$

Пространство строк $\Omega(M)$ лежит в V, $\dim V = 2n-2$

$\Omega(M)$ в V задает точку $LG_{\geq}(V)$, со специальной выбранной базой и с симпл. формой, которая получается ограничением $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ на V.

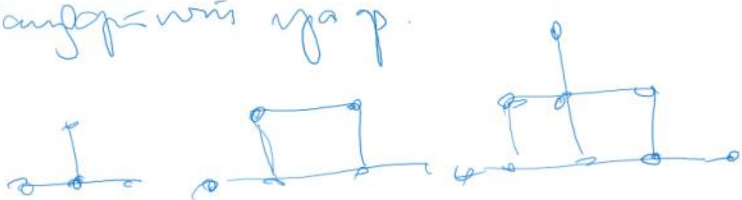
$$V = \left\{ (v_1 \dots v_{2n}),\ \sum v_{2i}(-1)^i = 0 \quad \sum v_{2i+1}(-1)^i = 0 \right\}$$

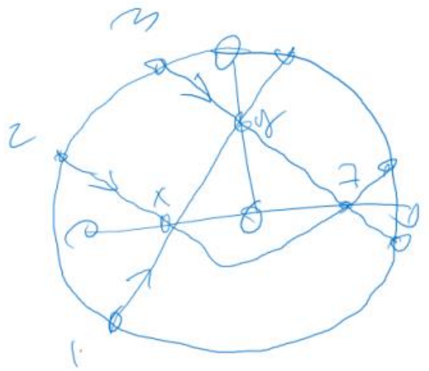
Вложение Лама

Техника вершинных моделей

2019 (Горбунов, Т)

Стандартный граф.





$M_R \sim M_B$

$M_R = R_{23}(7) R_{13}(y) R_{12}(x)$

$J = M_R U \rightsquigarrow Gr(n-1, 2n)$