О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Ситник Сергей Михайлович

профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования
Белгородский государственный национальный исследовательский университет

" Семинар по истории математики"
г. Санкт-Петербург, ПОМИ, 3 марта 2022 г.

БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
(НИУ "БелГУ" , Белгород, Россия)

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ВГУ)

ПАМЯТИ МОИХ УЧИТЕЛЕЙ:

Киприянова Ивана Александровича
Катрахова Валерия Вячеславовича

Содержание доклада

- Об истории Воронежского университета
- Известные Воронежские математики в области функционального анализа и дифференциальных уравнений
- И.А.Киприянов и его школа
- В.В.Катрахов и В.З.Мешков
- Современные работы

История ВГУ

Воронежский государственный университет был создан в 1918 году на базе Императорского Юрьевского университета, который был эвакуирован из Юрьева (ныне Тарту): в 1918 году в связи с угрозой германской интервенции часть преподавателей и студентов были эвакуированы в Воронеж. Дерптский (позже Юрьевский) университет в городе Дерпте был основан в 1802 году указом Александра I (первооснователем является шведский король Густав II Адольф основавший его еще в 1632 году). Это учебное заведение являлось вторым действующим университетом в России после Московского. Первым ректором университета стал принявший в Воронеже дела у последнего ректора Юрьевского университета главы его ликвидационной комиссии математика В. Г. Алексеева ученый-историк В. Э. Регель, который занимал эту должность до 1925 года. Учебные занятия начались 12 ноября 1918 года. В то время в состав университета входило 4 факультета — медицинский, физико-математический, историко-филологический и юридический.

История ВГУ

На начало 1919 года в университете обучалось 10 тысяч студентов. Учиться могли все желающие, лишь через 4 года в 1923 году были введены вступительные экзамены.
Во время Великой Отечественной войны с 1941 по 1943 год университет был эвакуирован в Елабугу.
В 1968 году университету Советом министров РСФСР было присвоено имя Ленинского комсомола. (*)

История ВГУ

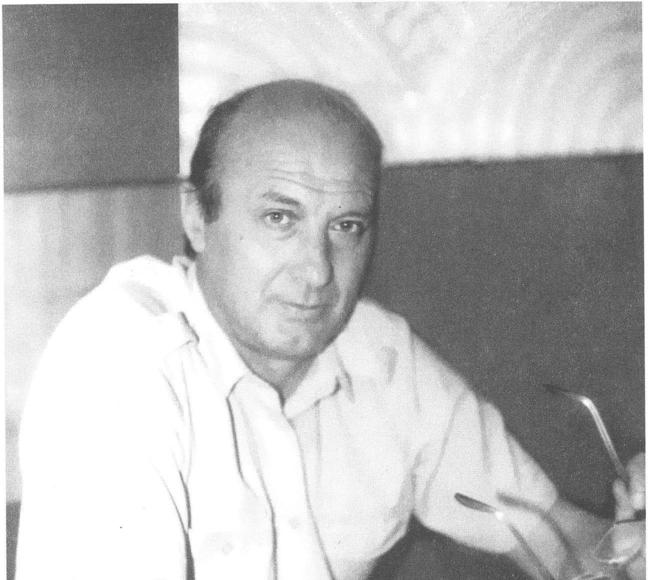
История математического факультета начинается в 1918 году, когда в числе первых факультетов ВГУ был открыт и физико-математический факультет (в 1969 году произошло разделение и факультет стал называться «математический»). В довоенный период на факультете работали такие выдающиеся математики, как В.Г. Алексеев (член математического общества), Н.В. Ефимов (*) (лауреат Ленинской премии), известный алгебраист профессор А.К. Сушкевич (*), профессора М.М. Гринблюм, Д.А. Райков и др. Заслуга в установлении связей между довоенной и послевоенной математическими школами принадлежит замечательному педагогу и ученому, профессору В.И. Соболеву (*), который был одним из первых специалистов в СССР в области функционального анализа. По его приглашению в Воронеж приехали профессора М.А. Красносельский (в 1953 г.) и С.Г. Крейн (в 1954 г.), ставшие основателями всемирно известной Воронежской математической школы.

История ВГУ

(*)

История факультета начинается в 1918 году, когда в числе первых факультетов ВГУ был открыт и физико-математический факультет. Факультет прикладной математики и механики был основан в 1969 году, когда произошло разделение на ПММ и математический факультеты. Факультет был образован, главным образом, благодаря усилиям известного ученого, профессора Г.И. Быковцева (*), который стал его первым деканом. Образование факультета в тот период явилось результатом бурного развития вычислительной техники и ростом потребности в специалистах по ее применению в научной, производственной и других сферах человеческой деятельности.

История ВГУ



История ВГУ

Сейчас Воронежский университет включает 18 факультетов. В Университете обучается более 20 тысяч студентов. За почти вековой срок существования, университет подготовил более 100 тысяч специалистов.

История ВГУ

Среди выпускников университета — Нобелевский лауреат П. А. Черенков, лауреаты государственных премий СССР и России, академики, министры, деятели науки и культуры.
Николай Геннадиевич Басов. (*)
Михаил Семёнович Цвет (14 мая 1872, Асти, Королевство Италия — 26 июня 1919, Воронеж, РСФСР) — русский ботаник-физиолог и биохимик растений. Создал хроматографический метод.
1918 — январь — выдвижение на Нобелевскую премию (отказ). 31 августа — эвакуация в Воронеж, где впоследствии работал в ботаническом саду Воронежского университета. 1919 — 26 июня — умер от голода (по другим сведениям, от болезни, вызванной последствиями ранее перенесённой полостной операции), похоронен в Воронеже на территории Алексеево-Акатова женского монастыря.
В некрополе на территории Акатова монастыря имеется надгробный памятник М. С. Цвета. На могиле ученого в декабре 1992 года было установлено надгробие с надписью: «Ему было дано открыть хроматографию, разделяющую молекулы, объединяющую людей».

Монография

Лауреаты Нобелевской премии.
Российские и советские учёные, изменившие мировую науку: сборник материалов.
Составители: В.А.Монастырёва, Н.А.Воронкова. Под общ. ред. О.Н.Полухина.
Белгород: ИД "БелГУ" НИУ "БелГУ", 2020 - 480 с.
(*)

Ростов-на-Дону : Налбандян Юлия Сергеевна
Воронеж: Удоденко Николай Николаевич

Марк Александрович Красносельский (1920—1997)

Селим Григорьевич Крейн (1917—1999)

Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956, 392 с.
Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1958, 271 с.
Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962, 394 с.
Красносельский М. А., Перов А. И., Поволоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963, 245 с.
Красносельский М. А. в большом авторском коллективе. Функциональный анализ. Серия “Справочная математическая библиотека, под редакцией С. Г. Крейна, 1 издание, Издательство “Наука, Москва, 1964, 424 с.
Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. Издательство “Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1966, 332 с.
Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. Издательство “Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1966, 499 с.

1. “Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве”
2. Справочник по функциональному анализу
3. Линейные уравнения в банаховом пространстве
4. “Математический анализ элементарных функций”

Глушко В.П.


ВЛАДИМИР ПАВЛОВИЧ ГЛУШКО (1931–2013)

Воронежская школа по применению дробного исчисления и уравнений дробного порядка в механике.
Юрий Алексеевич Россихин, Марина Вячеславовна Шитикова.

"Международный научный центр по фундаментальным исследованиям
в области естественных и строительных наук"
имени Заслуженного деятеля науки РФ
профессора Россихина Ю.А.

ИВАН АЛЕКСАНДРОВИЧ КИПРИЯНОВ
(1923—2001)

ШКОЛА И.А.КИПРИЯНОВА

Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука-Физматлит, 1997.

Наиболее полно весь круг вопросов для уравнений с операторами Бесселя был изучен воронежским математиком Иваном Александровичем Киприяновым и его учениками Л.А. Ивановым, А.В. Рыжковым, В.В. Катраховым, В.П. Архиповым, А.Н. Байдаковым, Б.М. Богачёвым, А.Л. Бродским, Г.А. Виноградовой, В.А. Зайцевым, Ю.В. Засориным, Г.М. Каганом, А.А. Катраховой, Н.И. Киприяновой, В.И. Кононенко, М.И. Ключанцевым, А.А. Куликовым, А.А. Лариным, М.А. Лейзиным, Л.Н. Ляховым, А.Б. Муравником, И.П. Половинкиным, А.Ю. Сазоновым, С.М. Ситником, В.П. Шацким, Э.Л. Шишкиной, В.Я. Ярославцевой.

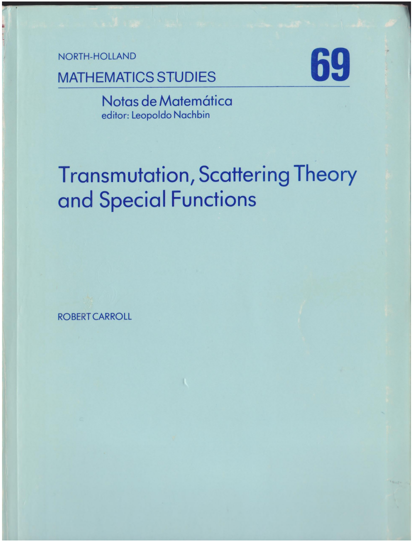
Пространства Киприянова. В.В.Катрахов.

Кафедра молодая!

Классификация И.А.Киприянова:
B–эллиптические, B–гиперболические, B–параболические уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} B_{\nu,x_k} u(x_1,\dots,x_n) = f,\, B_\nu u(x) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{du}{dx}. \qquad (1)$$

Изучение этого класса уравнений было начато в работах Эйлера, Пуассона, Дарбу, продолжено в теории обобщённого осесимметрического потенциала А. Вайнштейна и в трудах математиков И.Е. Егорова, Я.И. Житомирского, В.В. Кравченко, Л.Д. Кудрявцева, П.И. Лизоркина, М.И. Матийчука, Л.Г. Михайлова, М.Н. Олевского, М.С. Салахиддинова, М.М. Смирнова, С.А. Терсенова, А.К. Уринова, Хе Кан Чера, А.И. Янушаускаса и других.


NORTH-HOLLAND
MATHEMATICS STUDIES
69
Notas de Matemática
editor: Leopoldo Nachbin
Transmutation, Scattering Theory and Special Functions
ROBERT CARROLL

$$(10.54) \quad = (1/4\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\{\Phi_\lambda^Q(x)\Phi_{-\lambda}^Q(\xi) + \Phi_\lambda^Q(\xi)\Phi_{-\lambda}^Q(x)\}d\lambda \; +$$

$$(1/4\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{c_Q(\lambda)}{c_Q(-\lambda)}\Phi_\lambda^Q(x)\Phi_\lambda^Q(\xi) + \frac{c_Q(-\lambda)}{c_Q(\lambda)}\Phi_{-\lambda}^Q(x)\Phi_{-\lambda}^Q(\xi)\}d\lambda$$

If one could show that the integrals

$$(10.55) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda)\Phi_\lambda^Q(x)\Phi_\lambda^Q(\xi)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} S(-\lambda)\Phi_{-\lambda}^Q(x)\Phi_{-\lambda}^Q(\xi)d\lambda = 0$$

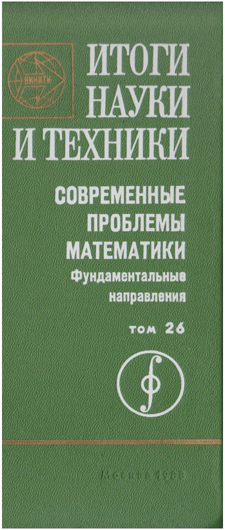
then since $\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\lambda^Q(x)\Phi_{-\lambda}^Q(\xi)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{-\lambda}^Q(x)\Phi_\lambda^Q(\xi)d\lambda$ we will obtain (10.52). Now in general (cf. Chadan-Sabatier [1]) one does not expect any analytic properties from $S(\lambda)$ in a halfplane $\mathrm{Im}\lambda > 0$ for example (recall here $F(\lambda) = 2i\lambda M(\lambda)$ and $F(-\lambda) = 1/2M_1(\lambda)$) but, with exponential decrease of $q(x)$, $F(\lambda)$ and $F(-\lambda)$ have a common domain of holomorphy. In particular for $\mathrm{Im}\lambda > -H$, $F(\lambda)$ and $1/F(-\lambda)$ are analytic (the simple pole at $\lambda = 0$ in $M(\lambda)$ is removed in $F(\lambda)$) and neither function vanishes for $\mathrm{Im}\lambda > -\delta$. Hence $S(\lambda) = F(-\lambda)/F(\lambda)$ $(= \rho(\lambda))$ is analytic for $\mathrm{Im}\lambda > -\delta$. As $|\lambda| \to \infty$, $|F(\lambda) - 1| = O(|\lambda|^{-1})$ and $|S(\lambda)| = O(1)$. Since $\Phi_\lambda^Q(x) \sim e^{i\lambda x}$ we deduce formally by taking contour integrals over large semicircles in the upper halfplane and passing to limits that (10.55) holds. Hence as in Hutson [4]

Vo

Theorem 10.13. For rapidly decreasing potentials q as indicated one has an inversion for (10.25) $\sim$ (10.48) of the form (10.50).

11. Singular pseudodifferential operators. In connection with work on embedding theorems and so-called Q-elliptic operators Katrakhov and Kipriyanov in particular introduced the study of certain singular pseudodifferential operators (psdo) connected with $\hat{Q}_m = Q_m^o = Q_m = D^2 + ((2m+1)/x)D$ (cf. here Katrakhov [1-4], Kipriyanov [1;2], Kipriyanov-Katrakhov [3], Kipriyanov-Kaščenko [5], Kipriyanov-Lyakov [4], Kipriyanov-Ivanov [6], Kipriyanov-Kononenko [7], Kipriyanov-Aziev [8], Kipriyanov-Klyučantsev [9], Leizin [1], Lyakov [1], Sazonov [1]). The constructions involved transmutation operat (for Q_m) of the form studied here and in using our general framework it is possible to generalize and reorganize the formulation of Katrakhov [2;4] a Kipriyanov-Katrakhov [3] in a more "canonical" manner. This leads to a ve sion which produces automatically analogous singular psdo for any singular Q of the form $Qu = (\Delta_Q u')'/\Delta_Q$ (with $R^Q \sim d\omega_Q$) modeled on the radial Laplac Beltrami operator in a rank one noncompact Riemannian symmetric space (the constructions of Katrakhov and Kipriyanov would not do this). We are main concerned with various aspects of transmutation and do not go into much de tail about psdo here; one can find a thorough exposition of the standard machinery in Treves [1]. It will be sufficient generally to think of C^∞ "symbols" $a(y,\lambda)$ of compact support in y, $D_y^k a(y,\lambda) = 0$ at $y = 0$ for $k \geq 1$, $a(y,\lambda) = 0$ for say $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$, $a(y,\lambda)$ even in y and λ, $|D_\lambda^\alpha D_y^\beta a(y,\lambda)| \leq c_{\alpha\beta}(1+|\lambda|)^{m-\alpha}$, etc. (homogeneity in λ of some order for example). Generally we do not use such properties beyond a few arguments with even functions (reflecting our preoccupation with halfline problems). It is quite enough for our purposes to exhibit the formal expressions which will define vario singular psdo and to make a few general remarks showing that this is meani ful. We also show how certain transmutations used by Katrakhov [4] can be written in terms of Erdélyi-Kober operators; this involves the study of an interpolating chain Π_μ of transmutations connecting B_Q and $\tilde{B}_Q = (B_Q^{-1})^\#$.

We will not try to sketch the development in Katrakhov and Kipriyanov sinc it is quite different at various places but we give a few points of contac One begins with a transmutation $B_Q: D^2 \to Q = Q_m$ where $Q_m = D^2 + ((2m+1)/x)$ and more generally we think of $B_Q: D^2 \to \hat{Q}$ where $Qu = (\Delta_Q u')'/\Delta_Q$ is modeled on the radial Laplace-Beltrami operator as above and $\hat{Q} = Q + \rho_Q^2$, $\rho_Q = \frac{1}{2}\lim \Delta_Q'/\Delta_Q$ as $x \to \infty$ (note for $Q = Q_m$, $\rho_Q = 0$ so $\hat{Q}_m = Q_m$). We recall for D^2 the spherical functions are $\varphi_\lambda^P(x) = \mathrm{Cos}\lambda x$ and for $Q = Q_m$ one has $\varphi_\lambda^Q(x)$



УДК 517.518.1+517.518.2

I. ПРОСТРАНСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

Л. Д. Кудрявцев, С. М. Никольский

СОДЕРЖАНИЕ

§ 5. Весовые пространства Киприянова

В 1967 году И. А. Киприянов рассмотрел класс весовых пространств, построенный на основе преобразований Фурье—Бесселя.

Пусть $\mathbf{R}^{n+1}$ — евклидово пространство точек $x=(x^{(n)}, y)$, $x^{(n)}=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbf{R}^n$, $y\in\mathbf{R}$, а $\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1}=\{x : y>0\}$. Для каждого $\nu\geqslant-\frac{1}{2}$ весовое *пространство* $L_{2,\nu}(\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1})$ определяется как множество измеримых по Лебегу функций $f:\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{2,\nu}(\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1})}=\left\{\int\limits_{\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1}}|f(x)|^2y^{2\nu+1}dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если $J_\nu(t)$ — функция Бесселя первого рода и

$$j_\nu(t)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}J_\nu(t), \tag{7.35}$$

то *преобразование Фурье — Бесселя* F_ν определяется по формуле

$$(F_\nu f)(\xi)=c_{n,\nu}\int\limits_{\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1}}e^{-i(\xi^{(n)},x^{(n)})}J_\nu(y\eta)\,f(x)\,y^{2\nu+1}dx, \tag{7.36}$$

где

$$c_{n,\nu}=\frac{1}{2^{\nu+\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\nu+1)}, \quad \xi=(\xi^{(n)}, \eta).$$

Из равенства типа равенства Парсеваля

$$\|f\|_{L_{2,\nu}(\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1})}=\|F_\nu f\|_{L_{2,\nu}(\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1})} \tag{7.37}$$

следует унитарность оператора F_ν в пространстве $L_{2,\nu}(\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1})$.

Подобно преобразованию Фурье, преобразование Фурье—Бесселя сводит операцию дифференцирования, правда специального вида, к умножению на соответствующие аргументы. Именно, если

$$B_y=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{2\nu+1}{y}\frac{\partial}{\partial y},$$

то для четной по переменной y функции f имеет место формула

$$\left(F_\nu\frac{\partial}{\partial x_j}B_yf\right)(\xi)=-i\xi_j\eta^2(F_\nu f)(\xi). \tag{7.38}$$

Через $W_{2,\nu}^{(s)}(\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1})$, $s\geqslant 0$, обозначается пространство измеримых на $\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1}$ функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W_{2,\nu}^{(s)}(\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1})}\overset{\text{def}}{=}\left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}F_\nu f\right\|_{L_{2,\nu}(\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1})}. \tag{7.39}$$

В работе И. А. Киприянова [22] доказана эквивалентность нормы (7.39) соответствующим нормам, записываемым в прообразах преобразования Фурье—Бесселя, например, при четных $s\geqslant 0$ одна из таких норм имеет вид

$$\left\{\int\limits_{\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1}}\left[|f(x)|^2+\left|B_y^{\frac{s}{2}}f(x)\right|^2+\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial^s}{\partial x_j^s}f(x)\right|^2\right]y^{2\nu+1}dx\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пространства $W_{2,\nu}^{(s)}(\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1})$ позволяют построить для полупространства достаточно полную теорию разрешимости эллиптического *уравнения типа Эйлера—Пуассона—Дарбу*

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_j^2}+B_yu-\lambda^2u=f(x), \quad x\in\overset{+}{\mathbf{R}}{}^{n+1} \tag{7.40}$$

с краевым условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0. \tag{7.41}$$

Эта теория послужила отправной точкой для получения теорем вложения для следов функций из пространств $W_{2,\nu}^{(s)}$ и построения спектральной теории для сингулярных эллиптических уравнений.

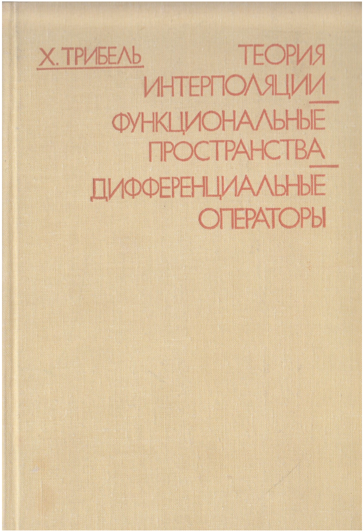
Пространства $W_{2,\nu}^{(s)}$ и их обобщения (анизотропные пространства подобного типа, пространства с комплексным параметром ν) нашли также свое применение в теории псевдодифференциальных операторов, изучении полюсов ядер дробных степеней сингулярных эллиптических операторов, построении теории сингулярных параболических систем уравнений и ряда других вопросов.

Глава 8

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПРОСТРАНСТВ НИКОЛЬСКОГО — БЕСОВА И ЛИЗОРКИНА — ТРИБЕЛЯ

§ 1. Интерполяция пространств

Для изучения вложений функциональных пространств широко применяется *метод интерполяций линейных операторов*, сущность которого состоит в том, что из ограниченности линейного



3.10.4. Пространства Киприянова

Один специальный класс весовых пространств типа Соболева — Слободецкого был изучен Киприяновым [1, 4]. Основную идею построения таких пространств можно описать следующим образом. Известно, что одним из самых мощных методов исследования пространств $H_p^s(R_n)$ служит преобразование Фурье. Естественно задаться вопросом, не существует ли каких-либо других интегральных преобразований, пригодных для исследования других классов функциональных пространств. Пусть $J_\nu(t)$, $\nu \geqslant -1/2$, — бесселевы функции. Тогда равенства

$$\hat{f}_\nu(s) = \int_0^\infty \sqrt{sx}\, J_\nu(sx) f(x)\, dx,$$

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{sx}\, J_\nu(sx) \hat{f}_\nu(s)\, ds$$

задают соответственно прямое и обратное *преобразования Бесселя*. Можно определить отвечающие этому преобразованию пространства как пополнение множества $C_0^\infty(R_n^+)$ по норме

$$\left(\int_{R_n^+} |f(x)|^2 x_n^{2\gamma}\, dx + \int_{R_n^+} \left| x_n^s \frac{\partial^s f}{(x_n \partial x_n)^s}(x) \right|^2 x_n^{2\gamma}\, dx \right)^{1/2},$$

$s = 1, 2, \ldots$, $\gamma \geqslant 0$. Более общие пространства подобного типа получаются, если скомбинировать несколько одномерных преобразований Бесселя и k-мерное преобразование Фурье. Кроме того, можно определить такие пространства и для нецелых s. Изложение теории такого рода пространств можно найти в указанных статьях Киприянова. Там имеются теоремы вложения, теоремы продолжения и т. д. Отметим еще статью Богачёва [1].

Валерий Вячеславович Катрахов
(фото из личного дела 1972 г.)

Валерий Вячеславович Катрахов
(фото из личного дела 2006 г.)

Основные результаты В.В.Катрахова:

- 1. Исследования систем сингулярных ДУ в частных производных и сингулярных ПДО
- 2. Развитие теории и обобщения операторов дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля
- 3. Новые краевые задачи с существенными особенностями (!!!)

Теория операторов преобразования является хорошо разработанным самостоятельным разделом математики. Значительный вклад в эту теорию и её приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными внесли работы воронежского математика Валерия Вячеславовича Катрахова (1949–2010), ученика Ивана Александровича Киприянова.

К числу важных результатов В. В. Катрахова следует отнести исследование весовых и спектральных задач для дифференциальных уравнений и систем с операторами Бесселя с использованием техники операторов преобразования. Им также совместно с И. А. Киприяновым были введены и изучены уравнения с псевдодифференциальными операторами, которые определялись через преобразование Ханкеля при помощи операторов преобразования Сонина и Пуассона.

Задача В.В.Катрахова с $K-$ следом.

Особо следует выделить введённый В. В. Катраховым новый класс краевых задач для уравнения Пуассона, решения которого могут иметь существенные особенности. На основе введённого им нового класса операторов преобразования, получаемых из известных операторов Сонина и Пуассона композициями с дробными интегралами Римана—Лиувилля, В. В. Катраховым были введены специальные функциональные пространства, содержащие функции с существенными особенностями, доказаны для них теоремы вложения, прямые и обратные теоремы о следах. Для функций без особенностей указанные пространства сводятся к пространствам С. Л. Соболева, таким образом являясь их прямыми обобщениями. Для корректности задач с существенными особенностями В. В. Катраховым было предложено новое естественное краевое условие во внутренней точке области, которое заключается в задании предела свёртки решения с некоторым сглаживающим ядром типа ядра Пуассона. Мы предлагаем называть это новое краевое условие «K-следом» в честь В. В. Катрахова, который ввёл это условие и подробно изучил краевые задачи с ним.

В терминах «K-следа» получается полная характеризация решений уравнения Лапласа с внутренней особой точкой, в том числе для решений с существенными особенностями в этой точке. Для данной задачи в указанных функциональных пространствах В. В. Катраховым была доказана корректность постановки, включая существование и единственность решения, априорные оценки. Этот результат обобщает теоремы о разрешимости эллиптических уравнений в классах С. Л. Соболева для гладких решений без особенностей. Кроме того, в последующих работах В. В. Катрахова с соавторами были рассмотрены обобщения новых краевых задач для уравнений с операторами Бесселя и сингулярным потенциалом, для областей в пространствах Лобачевского и случая угловых точек на границе области.

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Определение. Пусть дана пара операторов (A, B). Оператор $T \neq 0$ называется *оператором преобразования* (ОП, transmutation), если выполняется соотношение

$$T\,A = B\,T. \qquad (2)$$

Сплетающий оператор, transmutation, intertwining operator, подобный оператор.

$$Au = f, \quad : T, Bv = g$$
$$v = Tu, g = Tf.$$
$$u = T^{-1}v.$$

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

- Подобные матрицы (унитарное подобие)
- Дифференциальные операторы
- Преобразования Дарбу
- Интегральные операторы
- Интегродифференциальные операторы
- Операторы Дункла
- Дробные интегралы
- Псевдодифференциальные операторы
- Обобщённые аналитические функции

ДВА МОДЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРА

Оператор Штурма–Лиувилля:

$$A = D^2 + q(x)$$

Оператор Бесселя:

$$A = D^2 + \frac{c}{x} D$$

$$B = D^2$$

Ограничения:
дифференциальные операторы высокого порядка,
многомерные уравнения.

Классический период

- Уравнение Штурма–Лиувилля: В.А.Марченко, Б.Я.Левин, А.Я.Повзнер.
- Обратные задачи, теория рассеяния: Б.М.Левитан, В.А.Марченко, И.М.Гельфанд.
- Формулы следов, асимптотика спектральной функции: Б.М.Левитан, В.А.Марченко, И.М.Гельфанд.
- Теория обобщённых аналитических функций: Л.Берс, С.Бергман, И.Н. Векуа, Б.Боярский, Г.Н.Положий.
- Обобщённый гармонический анализ: Ж.Дельсарт, Я.И.Житомирский, Б.М.Левитан.
- Уравнения с операторами Бесселя: Ж.Дельсарт, Лионс, В.В.Сташевская, А.С.Сохин, А.Я.Волк.
- Связь операторов преобразования с теоремами типа Пэли–Винера: В.В.Сташевская, А.И.Ахиезер, Х.Шабли, Х.Тримеш.
- Метод Лакса.

Гипербесселевы уравнения: И. Димовски, В. Кирякова.
Роль интегральных преобразований:
преобразования Ханкеля, Обрешкова, Станковича.
Роль операторов дробного интегродифференцирования.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Carroll R. W. Singular and Degenerate Cauchy problems / R. W. Carroll, R. E. Showalter. — N.Y. : Academic Press, 1976.
- Carroll R. Transmutation and Operator Differential Equations / R. Carroll. — North Holland, 1979.
- Carroll R. Transmutation, Scattering Theory and Special Functions / R. Carroll. — North Holland, 1982.
- Carroll R. Transmutation Theory and Applications / R. Carroll. — North Holland, 1986.
- Фаге Д. К., Нагнибида Н. И. Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов / Д. К. Фаге, Н. И. Нагнибида. — Новосибирск : Наука, 1977

Основная литература

- Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля / В. А. Марченко. — Киев : Наукова Думка, 1972.
- Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. — Киев : Наукова Думка, 1977.
- Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б. М. Левитан. — М. : Наука, 1984.
- Левитан Б. М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — М. : Наука, 1988.

Задача В.В.Катрахова с $K-$ следом.

Задача В.З. Мешкова об оценке предельной скорости убывания решений стационарного уравнения Шрёдингера.

Виктор Захарович
Мешков
V.Z. Meshkov

Приложение метода операторов преобразования к оценкам решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и задаче Е.М.Ландиса

В статье Е.М. Ландиса поставлена следующая задача: доказать, что решение стационарного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом

$$\Delta u(x) - q(x)u(x) = 0,\ x \in R^n,\ |x| \geq R_0 > 0, \tag{3}$$
$$|q(x)| \leq \lambda^2,\ \lambda > 0,\ u(x) \in C^2\left(|x| \geq R_0\right),$$

удовлетворяющее оценке вида

$$|u(x)| \leq \text{const} \cdot\ e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|},\ \varepsilon > 0,$$

тождественно равно нулю.

В.З.Мешковым был дан отрицательный ответ на данный вопрос. Тем не менее, для некоторых классов дифференциальных уравнений проблема решается положительно. При этом используется метод операторов преобразования специального вида.

Теорема. Любое решение $u(x) \in C^2\left(|x| > R_0\right)$ стационарного уравнения Шрёдингера с ограниченным потенциалом

$$\Delta u(x) - q(x_1)u = 0,\ x \in R^n,\ |x| \geq R_0 > 0,$$

$$q(x_1) \in C\left(|x| \geq R_0\right),\ |q(x_1)| \leq \lambda^2,\ \lambda > 0,$$

удовлетворяющее оценке

$$|u(x)| \leq \mathrm{const}\, e^{-(\lambda+\varepsilon)|x|},\ \varepsilon > 0,$$

есть тождественный ноль.

V. I. Yudovich, “Eleven great problems of mathematical hydrodynamics”, Mosc. Math. J., 3:2 (2003), 711–737

Jean Bourgain, Carlos E. Kenig, “On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension”, Invent math, 161:2 (2005), 389

J. Bourgain, “Anderson–Bernoulli models”, Mosc. Math. J., 5:3 (2005), 523–536

Carlos Kenig, Luis Silvestre, Jenn-Nan Wang, “On Landis’ Conjecture in the Plane”, Communications in Partial Differential Equations, 2014, 1411030751

Теорема. Пусть $\psi(x_1) \in L_{2,\,loc}\,(x_1 \geq R_0)$, $\psi(x_1)$ — неубывающая функция, функция $g(x)$ удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Тогда любое решение уравнения

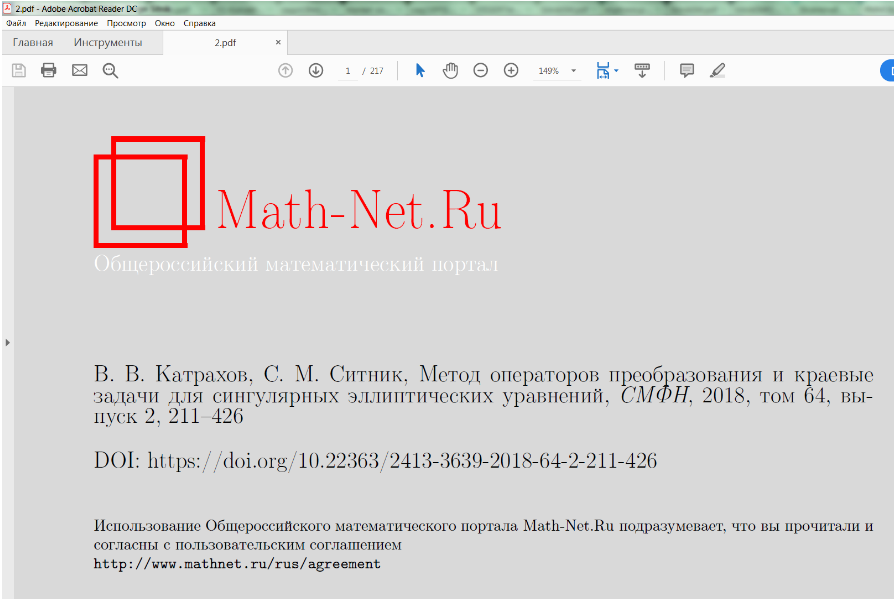
$$\Delta u(x) - q(x_1)u = 0,\; x \in R^n,\; |x| \geq R_0 > 0,$$

$$|q(x_1)| \leq \psi^2(x_1),$$

для которого выполнено неравенство

$$\psi(x_1)|u(x)| \leq \text{const}\, e^{-\psi(x_1)|x|} g(x),\; g(x) \geq 0,$$

есть тождественный ноль.
В условиях теоремы $g(x) = e^{-\varepsilon|x|}$. Примером другой допустимой $g(x)$ является функция $g(x) = \exp\left(-\varepsilon|x|^{\delta}\right)$, $0 < \delta < 1$.



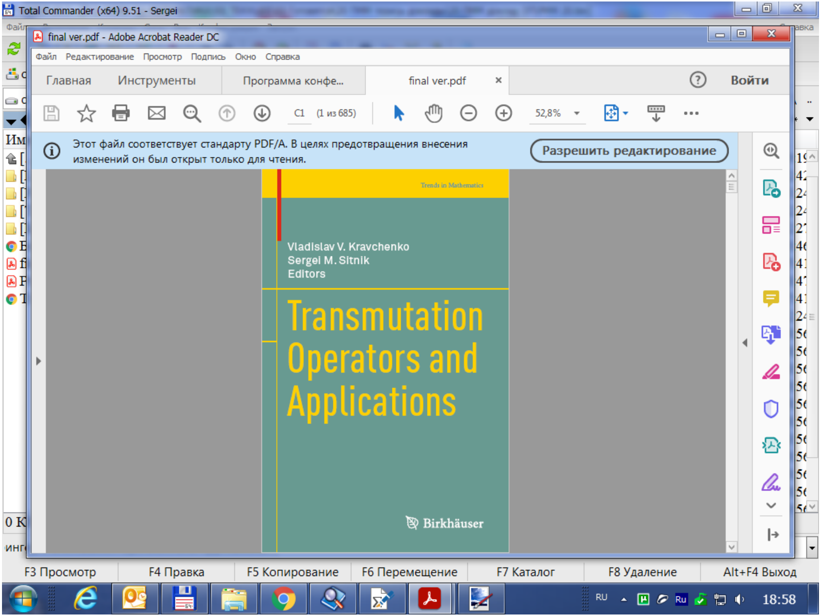
Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

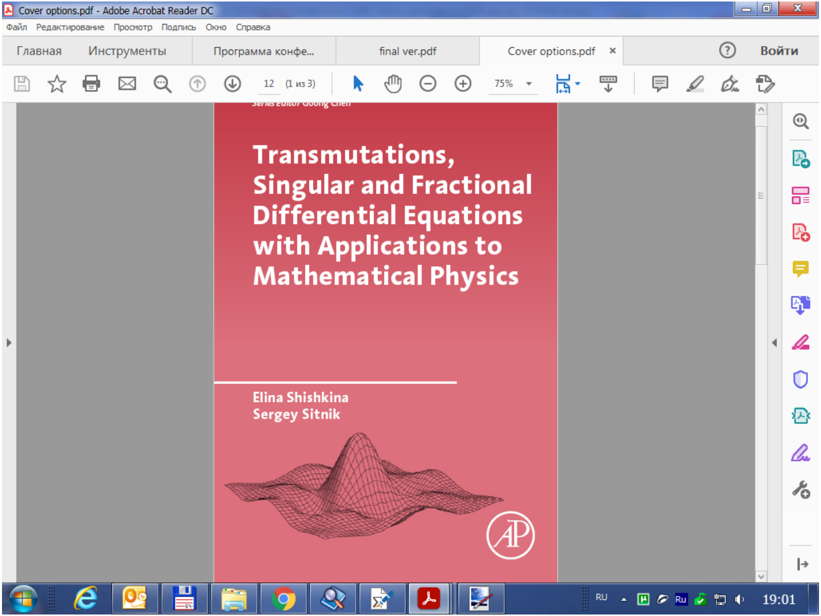
В. В. Катрахов, С. М. Ситник, Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений, *СМФН*, 2018, том 64, выпуск 2, 211–426

DOI: https://doi.org/10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426


Ситник Сергей Михайлович —
доктор физико-математических наук, профессор Белгородского государственного национального исследовательского университета.
Окончил Воронежский государственный университет (1983 г.), там же защитил кандидатскую (1987 г.) и докторскую (2016 г.) диссертации.
Области научных интересов в математике: теория операторов преобразования, специальные функции, неравенства, интегральные преобразования и операторы, теория приближений, численные методы.
Автор более 300 научных публикаций.
Шишкина Элина Леонидовна —
кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского государственного университета.
Окончила Воронежский государственный университет (2004 г.), там же защитила кандидатскую диссертацию (2006 г.).
Области научных интересов в математике: гиперболические уравнения, дробные производные и интегралы, дифференциальные операторы с особенностями, теория операторов преобразования, специальные функции.
Автор более 70 научных публикаций.
Авторы этой книги принадлежат к научной школе известного воронежского математика И.А. Киприянова, который со своими учениками развил теорию дифференциальных уравнений в частных производных с операторами Бесселя, а также рассмотрел их многочисленные приложения.
С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина
С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина
МЕТОД ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя


Total Commander (x64) 9.51 - Sergei
final ver.pdf - Adobe Acrobat Reader DC
Файл Редактирование Просмотр Подпись Окно Справка
Главная Инструменты Программа конфе... final ver.pdf
Войти
С1 (1 из 685)
52,8%
Этот файл соответствует стандарту PDF/A. В целях предотвращения внесения изменений он был открыт только для чтения.
Разрешить редактирование
Trends in Mathematics
Vladislav V. Kravchenko
Sergei M. Sitnik
Editors
Transmutation Operators and Applications
Birkhäuser
F3 Просмотр
F4 Правка
F5 Копирование
F6 Перемещение
F7 Каталог
F8 Удаление
Alt+F4 Выход
RU
18:58

В сборник вошли работы известных математиков Amin Boumenir, Vu Kim Tuan (USA), Djurdje Cvijovic (Serbia), Tibor K. Pogany (Croatia), Sh. T. Karimov (Uzbekistan), D.B. Karp (Israel, Vietnam, Russia), E.L. Shishkina (Poland), O.B. Скоромник, Л.Е. Хвощинской (Белоруссия), Ahmed Fitouhi (Tunisia), Yu. F. Luchko (Germany), В.В. Кравченко (Мексика), а также С.М. Ситника, Л. Бритвиной, Е. Прилепкиной, С.П Хэкало, В.В. Мещерекова, К.О. Политова, А.А. Ларина, А.Б. Муравника, В.Б. Васильева, С. Бутерина, А.В. Глушака, О. Яремко, В.А. Юрко, В.Е. Фёдорова, М.М. Маламуда, А.В. Псху, В.Ф. Молчанова, М.В. Плехановой, И.П. Половинкина, М.В. Шитиковой, Н.В. Зайцевой (Россия).
В этом сборнике отражён весь спектр задач современной теории операторов преобразования и их многочисленных приложений.


Cover options.pdf - Adobe Acrobat Reader DC
Файл Редактирование Просмотр Подпись Окно Справка
Главная Инструменты Программа конфе... final ver.pdf Cover options.pdf
Войти
12 (1 из 3)
75%
Transmutations, Singular and Fractional Differential Equations with Applications to Mathematical Physics
Elina Shishkina
Sergey Sitnik
19:01

Отметим также организованную В.В. Кравченко в октябре 2020 г. в Кэретаро, Мексика, CINVESTAV, первую специализированную конференцию по теории операторов преобразования, получившую сладко звучащее по–русски название TORT (Transmutation Operators and Related Topics). В конференции приняли участие ряд известных математиков В.В. Кравченко, Э.Л. Шишкина, В.С. Рабинович, С. Грудский, С. Торба, С.М. Ситник, Майкл Портер, и ряд других.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!