Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 3.

Теретёнков Александр Евгеньевич

14 февраля 2021 г.

Гауссовские состояния

Определение. Состояние ρ называется **гауссовским**, если его характеристическая функция $\chi_W(\mathbf{z}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{i\mathbf{z}^T \mathfrak{a}})$ представима в виде экспоненты от квадратичных и линейных форм по $\mathbf{z}$.

$$\mathbf{z} \equiv (z_1, \cdots, z_n, \overline{z}_1, \cdots, \overline{z}_n)^T$$

Матрицы плотности могут быть однозначно охарактеризованы посредством характеристических функций.

$$\chi_W(\mathbf{z}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{i\mathbf{z}^T \mathfrak{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T C \mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m},$$
$$\chi_N(\mathbf{z}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2}\mathfrak{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2}\mathfrak{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T \left(C + \frac{1}{2}E\right)\mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m},$$
$$\chi_A(\mathbf{z}) \equiv \mathrm{tr}(\rho\, e^{i\mathbf{z}^T \frac{I-EJ}{2}\mathfrak{a}} e^{i\mathbf{z}^T \frac{I+EJ}{2}\mathfrak{a}}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^T \left(C - \frac{1}{2}E\right)\mathbf{z} + i\mathbf{z}^T m}.$$

Гауссовские состояния

Символы операторов

$$\rho_O(\mathbf{z}) \equiv \int d\mathbf{z}\, e^{-i\mathbf{u}^T\mathbf{z}} \chi_O(\mathbf{u}), \qquad O = W, N, A$$

$$\rho_W(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(CE)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-m)^T C^{-1}(\mathbf{z}-m)}$$

$$\rho_N(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(CE + \frac{1}{2}I)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-m)^T \left(C+\frac{1}{2}E\right)^{-1}(\mathbf{z}-m)}$$

$$\rho_A(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{\det(CE - \frac{1}{2}I)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-m)^T \left(C-\frac{1}{2}E\right)^{-1}(\mathbf{z}-m)}$$

(в случае вырожденных матриц будут возникать дельта-функции.)

Гауссовские состояния

Смешанные состояния:

$$\rho = e^{\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K \mathfrak{a} + g^T \mathfrak{a} + s},$$

$$K = K^T = \tilde{K}, \quad KE < 0, \quad g = \tilde{g}, \quad e^s = \sqrt{|\det(e^{KJ} - I)|}\, e^{\frac{1}{2} g^T \frac{1}{K} g}$$

Утверждение.

$$m = -K^{-1} g, \qquad D = J \frac{e^{KJ}}{I - e^{KJ}}, \qquad C = -\frac{J}{2} \operatorname{cth} \frac{KJ}{2}$$

Прямая подстановка

Утверждение. $\rho_t = e^{\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K_t \mathfrak{a} + g_t^T \mathfrak{a} + s_t}$ удовлетворяет

$$\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_{H_t,\Gamma_t,f_t}(\rho_t), \qquad \rho_t|_{t=t_0} = e^{\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K_0 \mathfrak{a} + g_0^T \mathfrak{a} + s_0},$$

$$K_0 = K_0^T = \tilde{K}_0, K_0 E < 0, g_0 = \tilde{g}_0,$$

если матрица K_t определяется (однозначно при условии $K_t = K_t^T = \tilde{K}_t$) из уравнения $D_t(e^{-K_t J} - I) = J$, а матрица D_t в свою очередь удовлетворяет линейному матричному уравнению

$$\frac{d}{dt} D_t = J\left(iH_t + \frac{1}{2}(\Gamma_t^T - \Gamma_t)\right) D_t + \\ + D_t\left(-iH_t + \frac{1}{2}(\Gamma_t^T - \Gamma_t)\right) J + J\Gamma_t^T J,$$

Прямая подстановка

g_t определяется из линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{K_t J} g_t\right) = \left(iH_t + \frac{1}{2}(\Gamma_t^T - \Gamma_t)\right) J \frac{1}{K_t J} g_t - i f_t,$$

а эволюция скалярного коэффициента s_t определяется формулой

$$s_t = s_0 + \frac{1}{2} g_t^T J \frac{1}{K_t J} g_t - \frac{1}{2} g_0^T J \frac{1}{K_0 J} g_0 - \ln \frac{\sqrt{|\det(e^{K_0 J} - I)|}}{\sqrt{|\det(e^{K_t J} - I)|}},$$

Прямая подстановка

Идея доказательства.

$$\dot{\rho}_t \rho_t^{-1} = \mathfrak{a}^T \left(-iH_t - \frac{1}{2}\Gamma^T \right) \mathfrak{a} - i\mathfrak{a}^T f_t + \\ + \rho_t \left(\mathfrak{a}^T \left(iH_t - \frac{1}{2}\Gamma_t^T \right) \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}^T f_t \right) \rho_t^{-1} + \mathfrak{a}^T \Gamma_t \rho_t \mathfrak{a} \rho_t^{-1}.$$

Симметризуем квадратичные формы. Подставляем $\rho_t = e^{\frac{1}{2}\mathfrak{a}^T K_t \mathfrak{a} + g_t^T \mathfrak{a} + s_t}$. Приравнивая отдельно квадратичные, линейные формы и скаляры. $\square$

Уравнения для нормального символа

Утверждение. Пусть $\rho(\mathbf{z})$ — нормальный символ ρ, тогда:

$$(\mathfrak{a}\rho)(\mathbf{z}) = \left(\mathbf{z} + \frac{E-J}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)\rho(\mathbf{z}),$$
$$(\rho\mathfrak{a})(\mathbf{z}) = \left(\mathbf{z} + \frac{E+J}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)\rho(\mathbf{z}).$$

Уравнения для нормального символа

Утверждение. Нормальный символ $\rho_t(\mathbf{z})$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\rho_t(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\right)^T Q_t \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\rho_t(\mathbf{z}) - \mathbf{z}^T B_t^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\rho_t(\mathbf{z}) + \\ + i f_t^T J \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\rho_t(\mathbf{z}) - (\operatorname{Tr} B_t)\, \rho_t(\mathbf{z}),$$

где

$$Q_t = J\frac{\Gamma_t + \Gamma_t^T}{2}J - \frac{E}{2}\left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)J - J\left(iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)\frac{E}{2},$$

$$B_t^T = \left(-iH_t + \frac{\Gamma_t^T - \Gamma_t}{2}\right)J.$$

Уравнения для нормального символа

Утверждение. Если в начальный момент нормальный символ равен $\rho_0(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R_0 \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_0 + r_0}$, то решение уравнения для нормального символа имеет вид $\rho_t(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}$, где коэффициенты R_t, q_t, r_t удовлетворяют системе уравнений:

$$\dot{R}_t = -B_t^T R_t - R_t B_t + R_t Q_t R_t,$$
$$\dot{q}_t = (R_t Q_t - B^T) q_t - i R_t J f_t,$$
$$\dot{r}_t = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(Q_t R_t) - \operatorname{Tr} B_t + \frac{1}{2} q_t^T Q_t q_t + i f_t^T J q_t.$$

Уравнения для нормального символа

Утверждение. Если в начальный момент нормальный символ равен $\rho_0(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R_0 \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_0 + r_0}$, то решение уравнения для нормального символа имеет вид $\rho_t(\mathbf{z}) = e^{\frac{1}{2}\mathbf{z}^T R_t \mathbf{z} + \mathbf{z}^T q_t + r_t}$, где коэффициенты R_t, q_t, r_t удовлетворяют системе уравнений:

$$\dot{R}_t = -B_t^T R_t - R_t B_t + R_t Q_t R_t,$$
$$\dot{q}_t = (R_t Q_t - B^T) q_t - i R_t J f_t,$$
$$\dot{r}_t = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(Q_t R_t) - \operatorname{Tr} B_t + \frac{1}{2} q_t^T Q_t q_t + i f_t^T J q_t.$$

Замечание. Подстановка $C_t = -E/2 - R_t^{-1}$, $m_t = -R_t^{-1} q_t$ сводит первую пару уравнений к уравнениям для матрицы ковариаций и первых моментов.