Основные понятия теории множеств: 8/8

Станислав Олегович Сперанский

Санкт-Петербургский государственный университет

Санкт-Петербург 2020

Легко понять, что кардиналы мажорируют ординалы:

Предложение (в ZFC)

Для любого ординала α существует кардинал κ такой, что $\alpha < \kappa$.

Доказательство.

Рассмотрим

$$\kappa \;:=\; \mathrm{card}\,(\mathcal{P}\,(\alpha)).$$

Если $\alpha \nless \kappa$, то $\kappa \leqslant \alpha$, а потому $\kappa \subseteq \alpha$, откуда $\kappa \preccurlyeq \alpha$, т.е. $\mathcal{P}\,(\alpha) \preccurlyeq \alpha$ — противоречие. Стало быть, $\alpha \in \kappa$. □

Одно полезное наблюдение [в ZFC!]

Отметим, что класс всех кардиналов

$$\mathrm{Card} \;:=\; \{\kappa \mid \kappa \text{ — кардинал}\}$$

не является множеством. Действительно, в противном случае $\bigcup \mathrm{Card}$ также было бы множеством, но оно, как нетрудно видеть, совпадает с классом всех ординалов *(в качестве простого упражнения)*.

Запись 2^A может иметь разный смысл в зависимости от того, идёт ли речь о множествах в целом, об ординалах или о кардиналах. В случае кардиналов считается, что

$$2^\kappa \quad := \quad \mathrm{card}\,(\mathcal{P}\,(\kappa)),$$

а не множеству всех функций из κ в 2 (которое, впрочем, имеет ту же мощность). Очевидно, $2^\kappa > \kappa$ для всех кардиналов κ.

Для каждого кардинала κ обозначим

$$\kappa^+ \quad := \quad \text{наименьший из кардиналов, бóльших } \kappa.$$

Вместо $\aleph_0^+$ пишут $\aleph_1$, вместо $\aleph_1^+$ — $\aleph_2$ и так далее. На самом деле, можно было бы определить $\aleph_\alpha$ для произвольного ординала α.

Континуум-гипотезой называют следующее утверждение:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{CH}$$

Его можно ещё переформулировать так:

$$\forall X\,(\mathbb{N} \preccurlyeq X \preccurlyeq \mathbb{R} \to (X \sim \mathbb{N} \vee X \sim \mathbb{R}));$$

тут мы считаем известным, что $\mathbb{R}$ равномощно $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Многие, в том числе Кантор, пытались доказать CH.

Континуум-гипотезой называют следующее утверждение:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{CH}$$

Его можно ещё переформулировать так:

$$\forall X\,(\mathbb{N} \preccurlyeq X \preccurlyeq \mathbb{R} \to (X \sim \mathbb{N} \vee X \sim \mathbb{R}));$$

тут мы считаем известным, что $\mathbb{R}$ равномощно $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Многие, в том числе Кантор, пытались доказать CH.

Теорема (Гёдель, 1940)

Можно доказать, что $\neg$CH *нельзя доказать в* ZFC.

Континуум-гипотезой называют следующее утверждение:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{CH}$$

Его можно ещё переформулировать так:

$$\forall X \, (\mathbb{N} \preccurlyeq X \preccurlyeq \mathbb{R} \to (X \sim \mathbb{N} \vee X \sim \mathbb{R}));$$

тут мы считаем известным, что $\mathbb{R}$ равномощно $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Многие, в том числе Кантор, пытались доказать CH.

Теорема (Гёдель, 1940)

Можно доказать, что $\neg$CH *нельзя доказать в* ZFC. %интересно

Континуум-гипотезой называют следующее утверждение:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{CH}$$

Его можно ещё переформулировать так:

$$\forall X\, (\mathbb{N} \preccurlyeq X \preccurlyeq \mathbb{R} \to (X \sim \mathbb{N} \vee X \sim \mathbb{R}));$$

тут мы считаем известным, что $\mathbb{R}$ равномощно $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Многие, в том числе Кантор, пытались доказать CH.

Теорема (Гёдель, 1940)

Можно доказать, что ¬CH нельзя доказать в ZFC. %интересно

Теорема (Коэн, 1963)

Можно доказать, что CH нельзя доказать в ZFC.

Континуум-гипотезой называют следующее утверждение:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1. \tag{CH}$$

Его можно ещё переформулировать так:

$$\forall X\,(\mathbb{N} \preccurlyeq X \preccurlyeq \mathbb{R} \to (X \sim \mathbb{N} \vee X \sim \mathbb{R}));$$

тут мы считаем известным, что $\mathbb{R}$ равномощно $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Многие, в том числе Кантор, пытались доказать CH.

Теорема (Гёдель, 1940)

Можно доказать, что ¬CH *нельзя доказать в* ZFC. `%интересно`

Теорема (Коэн, 1963)

Можно доказать, что CH *нельзя доказать в* ZFC. `%ещё интереснее`

Пусть дано ч.у.м. $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$. Под цепью в $\mathfrak{A}$ понимается непустое $S \subseteq A$ такое, что для любых $a_1, a_2 \in S$,

$$a_1 \ \leqslant_A \ a_2 \quad \text{или} \quad a_2 \ <_A \ a_1.$$

Иными словами, цепи суть непустые подмножества носителя, индуцирующие линейные порядки.

Теорема (Лемма Цорна; в ZFC)

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ — ч.у.м. с непустым носителем, в котором у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда в $\mathfrak{A}$ есть максимальный элемент.

Доказательство.

Зафиксируем какой-нибудь кардинал κ, который строго больше, чем $|A|$. Пусть η — функция выбора для $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$. Используя трансфинитную рекурсию, определим $f :\subseteq \kappa \to A$ по правилу

$$f(\beta) = \eta(\{a' \in A \mid a' >_A a \text{ для всех } a \in \mathrm{range}(f\restriction_\beta)\}).$$

Легко видеть, что для любых $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{dom}(f)$,

$$\beta_1 < \beta_2 \implies f(\beta_1) <_A f(\beta_2).$$

...

Доказательство (окончание).

Из этого мы выводим два следствия.

1. f инъективна. Стало быть, $\mathrm{dom}\,(f) \neq \kappa$, а потому $\mathrm{dom}\,(f) = \alpha$ для некоторого $\alpha < \kappa$, причём

$$\{a' \in A \mid a' >_A a \text{ для всех } a \in \mathrm{range}\,(f)\} \;=\; \varnothing.$$

2. $\mathrm{range}\,(f)$ является цепью в $\mathfrak{A}$. Значит, у $\mathrm{range}\,(f)$ есть хотя бы одна верхняя грань в $\mathfrak{A}$, которую мы обозначим за $a_\circ$.

Разумеется, $a_\circ$ окажется максимальным элементом в $\mathfrak{A}$ (в противном случае мы бы получили противоречие с (1)). $\square$

Следствие (в ZFC)

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant_A \rangle$ *— ч.у.м., в котором у любой цепи имеется верхняя грань. Тогда для каждого* $a \in A$ *в* $\mathfrak{A}$ *есть макс. элемент* $a' \geqslant_A a$.

Доказательство.

Случай, когда $A = \varnothing$, тривиален. Поэтому будем считать, что $A \neq \varnothing$. Зафиксируем произвольное $a \in A$. Возьмём

$$B \ := \ \{b \in A \mid a \leqslant_A b\} \quad \text{и} \quad \leqslant_B \ := \ \leqslant_A \cap B \times B.$$

Очевидно, $\mathfrak{B} = \langle B, \leqslant_B \rangle$ будет ч.у.м., которое удовлетворяет условию леммы Цорна. Стало быть, в $\mathfrak{B}$ есть максимальный элемент a'. При этом $a \leqslant_A a'$ и, кроме того, a' окажется максимальным в $\mathfrak{A}$. □

Теорема (в ZFC)

Пусть X бесконечно. Тогда $|X \times X| = |X|$.

Доказательство.

Рассмотрим

$$M \;:=\; \left\{ f \mid f : U \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} U \times U, \text{ где } U \subseteq X \text{ и } U \text{ бесконечно} \right\}.$$

Поскольку X бесконечно, у него есть счётное подмножество, которое, разумеется, равномощно собственному декартову квадрату. Поэтому $M \neq \varnothing$. Определим

$$\leqslant \;:=\; \{(f_1, f_2) \in M \times M \mid f_1 \subseteq f_2\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{M} = \langle M, \leqslant \rangle$ является ч.у.м.

. . .

Доказательство (продолжение).

Давайте проверим, что в $\mathfrak{M}$ у каждой цепи имеется верхняя грань, а значит, к $\mathfrak{M}$ применима лемма Цорна.

Пусть S — произвольная цепь в $\mathfrak{M}$. Возьмём

$$f_S := \bigcup_{f \in S} f.$$

Легко видеть, что f_S будет биекцией из $\operatorname{dom}(f_S)$ на $\operatorname{range}(f_S)$, причём

$$\operatorname{dom}(f_S) = \bigcup_{f \in S} \operatorname{dom}(f) \quad \text{и} \quad \operatorname{range}(f_S) = \bigcup_{f \in S} \operatorname{range}(f).$$

...

Доказательство (ещё продолжение).

Покажем, что $\mathrm{range}\,(f_S) = \mathrm{dom}\,(f_S) \times \mathrm{dom}\,(f_S)$. Поскольку S является цепью в $\mathfrak{M}$, имеет место

$$\bigcup_{f_1, f_2 \in S} \mathrm{dom}\,(f_1) \times \mathrm{dom}\,(f_2) \;=\; \bigcup_{f \in S} \mathrm{dom}\,(f)^2.$$

(здесь и далее мы часто пишем U^2 вместо $U \times U$; просьба не путать с множеством всех функций из 2 в U). Следовательно,

$$\mathrm{range}\,(f_S) \;=\; \bigcup_{f \in S} \mathrm{range}\,(f) \;=\; \bigcup_{f \in S} \mathrm{dom}\,(f)^2 \;=$$

$$\bigcup_{f_1, f_2 \in S} \mathrm{dom}\,(f_1) \times \mathrm{dom}\,(f_2) \;=\; \Big(\bigcup\nolimits_{f \in S} \mathrm{dom}\,(f)\Big)^2 \;=\; \mathrm{dom}\,(f_S)^2.$$

Стало быть, $f_S \in M$. Более того, $f_S \geqslant f$ для любого $f \in S$. В итоге f_S оказывается верхней гранью (и даже супремумом) для S в $\mathfrak{M}$.

...

Доказательство (и ещё продолжение).

По лемме Цорна в $\mathfrak{M}$ есть максимальный элемент $f_\star$. Для краткости обозначим $\operatorname{dom}(f_\star)$ через Y. Гипотетически возможны два случая.

«Хороший случай»: Допустим, что $|X \setminus Y| \leqslant |Y|$. Тогда

$$|Y| \leqslant |X| = |X \setminus Y \sqcup Y| \leqslant |\{0,1\} \times Y| \leqslant |Y \times Y| = |Y|$$

откуда $|X| = |Y|$ по теореме К.–Ш.–Б., а потому $|X \times X| = |X|$.

«Плохой случай»: Теперь допустим, что $|Y| < |X \setminus Y|$. В частности, Y равномощно некоторому $Z \subseteq X \setminus Y$. Очевидно,

$$(Y \sqcup Z)^2 = Y^2 \sqcup (Y \times Z) \sqcup (Z \times Y) \sqcup Z^2,$$

причём $\left|Z^2\right| = |Z \times Y| = |Y \times Z| = \left|Y^2\right| = |Y| = |Z|$.

...

Доказательство (окончание).

Далее, возьмём

$$V := (Y \times Z) \sqcup (Z \times Y) \sqcup Z^2.$$

Таким образом, $(Y \sqcup Z)^2 = Y^2 \sqcup V$. Заметим, что

$$|Z| \leqslant |V| = |\{0,1,2\} \times Z| \leqslant |Z \times Z| = |Z|,$$

откуда $|V| = |Z|$ по теореме К.–Ш.–Б. Пусть g — какая-нибудь биекция из Z на V. Определим $h : (Y \cup Z) \to (Y \cup Z)^2$ по правилу

$$h(x) := \begin{cases} f_\star(x) & \text{если } x \in Y; \\ g(x) & \text{если } x \in Z. \end{cases}$$

Разумеется, h будет биекцией, т.е. $h \in M$. Но $h > f_\star$ — противоречие. Выходит, что «плохой случай» невозможен. $\square$

Следствие (в ZFC)

Если $0 < |X| \leqslant |Y|$ *и* Y *бесконечно, то* $|X \times Y| = |Y|$.

Доказательство.

Ясно, что
$$|Y| \leqslant |X \times Y| \leqslant |Y \times Y| = |Y|,$$
откуда $|X \times Y| = |Y|$ по теореме К.–Ш.–Б. □

Иными словами, если X и Y непусты, и хотя бы одно из них бесконечно, то
$$|X \times Y| = \max\{|X|, |Y|\},$$
где $\max\{\ldots\}$ обозначает «максимальный/наибольший эл-т $\{\ldots\}$».

Следствие (в ZFC)

Пусть $|X| \leqslant |Y|$ *и* Y *бесконечно. Тогда* $|X \cup Y| = |Y|$.

Доказательство.

Легко видеть, что

$$|Y| \;\leqslant\; |X \cup Y| \;=\; |X \setminus Y \sqcup Y| \;\leqslant\; |\{0,1\} \times Y| \;=\; |Y|,$$

откуда $|X \cup Y| = |Y|$ по теореме К.–Ш.–Б. $\square$

Иными словами, если хотя бы одно из X и Y бесконечно, то

$$|X \cup Y| \;=\; \max\{|X|, |Y|\}.$$

Следствие (в ZFC)

Пусть $|X| < |Y|$ *и* Y *бесконечно. Тогда* $|Y \setminus X| = |Y|$.

Доказательство.

В силу предыдущего следствия,

$$\begin{aligned} |Y| \;&=\; \max\{|X|, |Y|\} \;=\; |X \cup Y| \;=\; \\ &\qquad\qquad |X \sqcup Y \setminus X| \;=\; \max\{|X|, |Y \setminus X|\}. \end{aligned}$$

Поскольку $|Y| \neq |X|$, мы получаем $|Y| = |Y \setminus X|$. $\square$

Следствие (в ZFC)

Пусть X бесконечно. Тогда $|X^*| = |X|$.

Доказательство.

Вспомним, что $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$, где X^n — множество всех функций из n в X. По индукции легко показать, что

$$\left|X^{n+1}\right| = |X| \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

При этом $X^0 = \{\varnothing\}$, откуда $\left|X^0\right| = 1$. Стало быть,

$$|X^*| = \left|X^* \setminus X^0\right| = \left|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{n+1}\right| = |\mathbb{N} \times X| = |X|$$

(проверка третьего равенства — простое упражнение). □

Конец курса.