2 Марта 2022

Бигамильтонова сущность алгебр Годена

размышления о том, как делить многочлены с остатком

Оксана Якимова

arxiv:2105.01020

Institut für Mathematik

Fakultät für Mathematik und Informatik

FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA

Москва, МГУ, Семинар “Группы Ли и теория инвариантов”

Краткое содержание доклада

Пусть $\mathfrak{g}$ редуктивна, $\vec{z}=(z_1,\dots,z_n)\in(\mathbb{C}^\times)^n$, $z_i\neq z_j$ при $i\neq j$.

$$\mathcal{C}(\vec{z})\subset U(\underbrace{\mathfrak{g}\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}}_{\text{сумма } n \text{ копий}})\leftarrow U(\mathfrak{g}[t])\leftarrow U(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])\supset \underbrace{\mathfrak{z}(\hat{\mathfrak{g}})}_{\text{центр Фейгина–Френкеля}}$$

$$\big\downarrow$$

$\operatorname{gr}(\mathcal{C}(\vec{z}))\subset S(\mathfrak{g}\oplus\dots\oplus\mathfrak{g})$ Пуассон-коммутативная подалгебра

(*) На пространстве $\mathfrak{g}\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}$ есть разные структуры алгебры Ли.

$$\mathfrak{g}\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}t\oplus\dots\oplus\mathfrak{g}t^{n-1}\xleftarrow[\text{фактор по многочлену степени } n]{}\mathfrak{g}[t]$$

(◇) “Классический" аналог $\mathsf{gr}(\mathcal{C}(\vec{z}))$ алгебры Годена $\mathcal{C}(\vec{z})$ можно построить стандартным образом, если выбрать две подходящие скобки Пуассона на $\mathfrak{g}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{g}$.

1. Скобка Пуассона и Пуассон-коммутативные подалгебры

Пусть $\mathfrak{q}$ – неабелева алгебра Ли над полем $\Bbbk$ ($\mathsf{char}\,\Bbbk = 0$). На симметрической алгебре $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ задана скобка Пуассона–Ли:

- ◇ $\{\xi, \eta\} = [\xi, \eta]$ при $\xi, \eta \in \mathfrak{q}$, продолжается на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ по правилу Лейбница (**область алгебры**);
- ◇ $\{F_1, F_2\}(\gamma) = \gamma([d_\gamma F_1, d_\gamma F_2])$, если $F_1, F_2 \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$, $\gamma \in \mathfrak{q}^*$ (**геометрия**);
- ◇ $\{\boldsymbol{f}+\mathcal{U}_a(\mathfrak{q}), \boldsymbol{h}+\mathcal{U}_b(\mathfrak{q})\} = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}]+\mathcal{U}_{a+b}(\mathfrak{q})$, если $\boldsymbol{f} \in \mathcal{U}_{a+1}(\mathfrak{q})$ и $\boldsymbol{h} \in \mathcal{U}_{b+1}(\mathfrak{q})$.

Третье определение использует тот факт, что $\mathcal{S}(\mathfrak{q}) \cong \mathsf{gr}\,\mathcal{U}(\mathfrak{q})$.

Если $\mathfrak{q}$ конечномерна, то $\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \Bbbk[\mathfrak{q}^*]$.

Опр. 1. Алгебра $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ называется Пуассон-коммутативной, если $\{A, A\} = 0$.

Если подалгебра $C \subset \mathcal{U}(\mathfrak{q})$ коммутативна, то $\mathsf{gr}(C) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ Пуассон-коммутативна. Также возникает обратная задача.

Проблема квантования. Пусть дана Пуассон-коммутативная подалгебра $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$. Существует ли такая коммутативная подалгебра $\tilde{A} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{q})$, что $A = \mathsf{gr}(\tilde{A})$?

Некоторые обозначения:

◇ Линейная функция $\gamma \in \mathfrak{q}^*$ задает кососимметрическую форму $\widehat{\gamma}$ на $\mathfrak{q}$ по формуле $\widehat{\gamma}(\xi,\eta) = \gamma([\xi,\eta])$ для любых $\xi,\eta \in \mathfrak{q}$.

◇ Для $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ положим $\mathrm{d}_\gamma A := \langle \mathrm{d}_\gamma F \mid F \in A\rangle_{\Bbbk}$.

◇ Пусть $\mathfrak{q}_\gamma = \mathsf{Lie}\, Q_\gamma = \ker \widehat{\gamma}$ – стабилизатор точки γ. Тогда

$$\mathsf{ind}\,\mathfrak{q} := \min_{\gamma\in\mathfrak{q}^*} \dim \mathfrak{q}_\gamma \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}(\mathfrak{q}) := \tfrac{1}{2}(\dim\mathfrak{q} + \mathsf{ind}\,\mathfrak{q}).$$

Предположим, что $\{A,A\} = 0$ и $\{A,A\} = 0$, тогда $\widehat{\gamma}(\mathrm{d}_\gamma A, \mathrm{d}_\gamma A) = 0$ и следовательно

$$\dim \mathrm{d}_\gamma A \leqslant \frac{1}{2}\dim(\dim\mathfrak{q} - \dim\mathfrak{q}_\gamma) + \dim\mathfrak{q}_\gamma.$$

Поэтому $\mathsf{tr.deg}\, A \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{q})$.

В большей общности [А. Молев – О.Я.(2019)], для любой подалгебры Ли $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{q}$ и любой Пуассон-коммутативной подалгебры $A \subset \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{l}}$ выполнено

$$\mathsf{tr.deg}\, A \leqslant \boldsymbol{b}(\mathfrak{q}) - \boldsymbol{b}(\mathfrak{l}) + \mathsf{ind}\,\mathfrak{l} =: \boldsymbol{b}^{\mathfrak{l}}(\mathfrak{q}), \tag{1}$$

Замечание. Для любой коммутативной подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{l}}$ выполнено неравенство $\mathsf{tr.deg}\,\mathcal{C} \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathfrak{l}}(\mathfrak{q})$.

2. Схема Ленарда–Магри (согласованные скобки Пуассона)

Две скобки Пуассона на $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ согласованы, если любая их линейная комбинация снова является скобкой Пуассона. (Достаточно проверить для суммы.) Без формальных подробностей, бигамильтонова система – это пара согласованных скобок Пуассона $\{\ ,\ \}', \{\ ,\ \}''$ или натянутый на них пучок $\{a\{\ ,\ \}' + b\{\ ,\ \}'' \mid a, b \in \Bbbk\}$.

Пусть π', π'' – это тензоры Пуассона (бивекторы) скобок $\{\ ,\ \}', \{\ ,\ \}''$, то есть, $\pi'(\mathrm{d}F \wedge \mathrm{d}H) = \{F, H\}'$, если $F, H \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$. Тогда $\pi_{a,b} = a\pi' + b\pi''$ – это тензор Пуассона скобки $a\{\ ,\ \}' + b\{\ ,\ \}''$. Для почти всех $(a, b) \in \Bbbk^2$, тензор $a\pi' + b\pi''$ имеет один и тот же максимальный ранг, скажем, $\boldsymbol{r}$. Скобка $a\{\ ,\ \}' + b\{\ ,\ \}''$ и точка (a, b) регулярны, если $\mathsf{rk}(a\pi' + b\pi'') = \boldsymbol{r}$. Алгебра

$$\mathcal{Z}(\{\ ,\ \}', \{\ ,\ \}'') = \mathsf{alg}\langle \mathcal{ZS}(\mathfrak{q}, a\{\ ,\ \}' + b\{\ ,\ \}'') \mid \mathsf{rk}(a\pi' + b\pi'') = \boldsymbol{r}\rangle$$

Пуассон-коммутативна относительно любой из скобок $a\{\ ,\ \}' + b\{\ ,\ \}''$.

Для изучения алгебр вида $\mathcal{Z}(\{\ ,\ \}', \{\ ,\ \}'')$ имеются хорошо разработанные геометрические методы.

Для тензора Пуассон π алгебры Ли $\mathfrak{q}$ имеем $\widehat{\gamma} = \pi(\gamma)$ и $\mathsf{ind}\,\mathfrak{q} = \mathsf{dim}\,\mathfrak{q} - \mathsf{rk}\,\pi$, где $\mathsf{rk}\,\pi = \mathsf{max}_{\gamma\in\mathfrak{q}^*}\,\mathsf{rk}\,\pi(\gamma)$. Кроме того, $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q}) = \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$.

3. Модель Годена

Пусть $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли. Модель Годена связанная с $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\oplus n}$ состоит из n квадратичных гамильтонианов, зависящих от $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \Bbbk^n$.

Пусть $\{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant \dim \mathfrak{g}\}$ – это ортонормальный относительно формы Киллинга $\varkappa$ базис в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $x_i^{(k)} \in \mathfrak{h}$ ту копию элемента x_i, которая лежит в k-ой копии $\mathfrak{g}$. Предположим, что $z_j \neq z_k$ при $j \neq k$ и положим

$$\mathcal{H}_k = \sum_{j \neq k} \frac{\sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} x_i^{(k)} x_i^{(j)}}{z_k - z_j}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2}$$

Эти гамильтонианы Годена могут рассматриваться как элементы

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n} \cong \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \quad \text{или} \quad \mathcal{S}(\mathfrak{h}).$$

Они коммутируют друг с другом в обертывающей $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ и следовательно Пуассон-коммутируют в $\mathcal{S}(\mathfrak{h})$. Заметим, что $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{H}_k = 0$.

По построению, каждый гамильтониан $\mathcal{H}_k$ является инвариантом диагонально вложенной $\mathfrak{g}$, то есть инвариантом $\Delta\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$.

4. Подалгебры Годена

В 1994 г. Б. Фейгин, Э. Френкель и Н. Решетихин построили большую коммутативную алгебры $\mathcal{C}(\vec{z}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\Delta\mathfrak{g}}$, содержащую все гамильтонианы $\mathcal{H}_k$.

Обертывающая алгебра $\mathcal{U}(\mathfrak{g}[t^{-1}])$ содержит большую коммутативную подалгебру, центр Фейгина–Френкеля $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}, t^{-1})$. Пусть $\Delta\mathcal{U}(\mathfrak{g}[t^{-1}]) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}[t^{-1}])$ – это диагонально вложенная в $\mathcal{U}(\mathfrak{g}[t^{-1}])^{\otimes n}$ копия $\mathcal{U}(\mathfrak{g}[t^{-1}])$. Предположим, что $\vec{z} \in (\Bbbk^\times)^n$. Тогда $\vec{z}$ определяет естественный гомоморфизм
$\rho_{\vec{z}} \colon \Delta\mathcal{U}(\mathfrak{g}[t^{-1}]) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\otimes n}$, для которого

$$\rho_{\vec{a}}(xt^k) = z_1^k x^{(1)} + z_2^k x^{(2)} + \ldots + z_n^k x^{(n)} \in \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g} \quad \text{для} \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Пусть $\mathcal{C}(\vec{z})$ – это образ $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}}, t^{-1})$ относительно $\rho_{\vec{z}}$. Если $z_j \neq z_k$ при $j \neq j$, то $\mathcal{C}(\vec{z})$ содержит гамильтонианы $\mathcal{H}_k$, связанные с $\vec{z}$.

Согласно [Червов, Falqui и Рыбников (2010)],

- $\text{tr.deg}\,\mathcal{C}(\vec{z}) = \frac{n-1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \text{rk}\,\mathfrak{g}) + \text{rk}\,\mathfrak{g} = \boldsymbol{b}^{\Delta\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$,
- $\mathcal{C}(\vec{z})$ – алгебра многочленов от $\boldsymbol{b}^{\Delta\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ переменных.

В литературе часто встречается следующее (не совсем верное) утверждение:

- $\mathcal{C}(\vec{z})$ – максимальная коммутативная подалгебра в $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$.

Правильная версия:

- ◇ $\mathcal{C}(\vec{z})$ – максимальная коммутативная подалгебра в $\mathcal{U}(\mathfrak{h})^{\Delta\mathfrak{g}}$.

Рассуждения в [CFR] используют некоторые предельные конструкции и связь с подалгебрами Мищенко–Фоменко.

Ассоциированная градуированная алгебра $\mathrm{gr}(\mathcal{C}(\vec{z})) \subset \mathcal{S}(\mathfrak{h})$ Пуассон-коммутативна.

На $\mathfrak{h}^*$ существует пара согласованных скобок Пуассона,
из которой получается $\mathrm{gr}(\mathcal{C}(\vec{z}))$ по схеме Ленарда–Магри.

5. Факторы алгебры токов

Пусть $p \in \Bbbk[t]$ – это нормированный многочлен степени $n \geqslant 1$. Тогда факторпространство $\mathfrak{q}[t]/(p) \cong \mathfrak{q} \otimes (\Bbbk[t]/(p))$ изоморфно сумме

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}(\mathfrak{q}, n) = \mathfrak{q}{\cdot}1 \oplus \mathfrak{q}\bar{t} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{q}\bar{t}^{n-1},$$

где $\bar{t}$ отождествляется с $t + (p)$, и является алгеброй Ли. Пусть $[\ ,\ ]_p$ – это скобка на $\mathbb{W}$, которую определяет p, то есть $\mathfrak{q}[t]/(p) \cong (\mathbb{W}, [\ ,\ ]_p)$ как алгебра Ли. Мы отождествляем $\mathfrak{q}$ с $\mathfrak{q}{\cdot}1 \subset \mathbb{W}$. В частном случае $p = t^n$ положим $\mathfrak{q}\langle n\rangle = \mathfrak{q}[t]/(t^n)$. Алгебра Ли $\mathfrak{q}\langle n\rangle$ известна как (обобщенная) алгебра Такифа связанная с $\mathfrak{q}$. Заметим, что $\mathfrak{q}\langle 1\rangle \cong \mathfrak{q}$. Если $\dim \mathfrak{q} < \infty$, то согласно [Raïs–Tauvel (1992)], имеем

$$\operatorname{ind} \mathfrak{q}\langle n\rangle = n{\cdot}\operatorname{ind} \mathfrak{q}. \tag{3}$$

С этого момента будем предполагать, что $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$.

Предложение 2. Предположим, что $p = \prod_{i=1}^{u}(t - a_i)^{m_i}$, где $m_i \geqslant 1$ для каждого $i \leqslant u$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{u} m_i = n$. Тогда $\mathfrak{q}[t]/(p) \cong \bigoplus_{i=1}^{u} \mathfrak{q}\langle m_i\rangle$.

В конечномерном случае из предложения 2 следует, что $\operatorname{ind}(\mathbb{W}, [\ ,\ ]_p) = n{\cdot}\operatorname{ind} \mathfrak{q}$.

Пример 3. Пусть $m_i = 1$ для каждого i. Положим $r_i = \dfrac{p}{(t-a_i)} \prod_{j\neq i}(a_i - a_j)^{-1}$. Тогда $r_i^2 \equiv r_i \pmod{p}$. Это явное применение китайской теоремы об остатках. Каждое подпространство $\mathfrak{q}\bar{r}_i$ является подалгеброй Ли в $\mathfrak{q}[t]/(p)$, изоморфной $\mathfrak{q}$, и

$$\mathfrak{q}[t]/(p) = \mathfrak{q}\bar{r}_1 \oplus \mathfrak{q}\bar{r}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{q}\bar{r}_n. \tag{4}$$

В частности, $\mathfrak{g}[t]/(p) \cong \mathfrak{g}^{\oplus n}$ полупроста, если $\mathfrak{g}$ полупроста.

6. Согласованные скобки $\{\ ,\ \}_{p_1}$ и $\{\ ,\ \}_{p_2}$ на $\mathcal{S}(\mathbb{W})$

Предложение 4. Пусть $p_1, p_2 \in \Bbbk[t]$ – различные нормированные многочлены степени n. Если $\deg(p_1 - p_2) \leqslant 1$, то скобки $\{\ ,\ \}_{p_1}$ и $\{\ ,\ \}_{p_2}$ согласованы. Конкретнее, $a\{\ ,\ \}_{p_1} + (1-a)\{\ ,\ \}_{p_2} = \{\ ,\ \}_{ap_1+(1-a)p_2}$.

Пучок $L(p_1,p_2) := \langle\{\ ,\ \}_{p_1}, \{\ ,\ \}_{p_2}\rangle$ содержит единственную нерегулярную прямую $\Bbbk\ell$, где $\ell = \{\ ,\ \}_{p_1} - \{\ ,\ \}_{p_2}$, и всегда $\mathrm{ind}(\mathbb{W},\ell) = \dim\mathfrak{q} + (n-1)\mathrm{ind}\,\mathfrak{q}$.

Коммутатор $[\mathfrak{q}\cdot 1, \mathbb{W}]_p$ не зависит от p, поэтому $\mathcal{Z}_p = \mathcal{Z}(\mathcal{S}(\mathbb{W}), \{\ ,\ \}_p) \subset \mathcal{S}(\mathbb{W})^{\mathfrak{q}}$ и $\mathcal{Z}(p_1,p_2) = \mathrm{alg}\langle \mathcal{Z}_p \mid p = ap_1 + (1-a)p_2\rangle \subset \mathcal{S}(\mathbb{W})^{\mathfrak{q}}$.

Пример 5. Положим $p = p_1 = t^n - 1$, $\tilde p = p_2 = t^n$. Тогда

$$L(p,\tilde p) = \Big\{ \Bbbk\{\ ,\ \}_{t^n+\alpha},\ \ \Bbbk\ell \mid \alpha\in\Bbbk,\ \ell = \{\ ,\ \}_{t^n-1} - \{\ ,\ \}_{t^n} \Big\}.$$

Здесь $(\mathbb W, [\ ,\ ]_{t^n+\alpha}) \cong \mathfrak q^{\oplus n}$, если $\alpha\ne 0$;

$$(\mathbb W, [\ ,\ ]_{t^n}) \cong \mathfrak q\langle n\rangle \text{ (алгебра Такифа)};$$

и $\ell(x\bar t^{a}, y\bar t^{b}) = \begin{cases} 0 & \text{при } a+b<n,\\ [x,y]\bar t^{b+a-n} & \text{при } a+b\geqslant n,\end{cases}$ если $x,y\in\mathfrak q$.

На алгебре Ли $(\mathbb W,\ell)$ задана $\mathbb N$-градуировка: $\mathbb W = \mathfrak q\bar t^{n-1}\oplus\mathfrak q\bar t^{n-2}\oplus\ldots\oplus\mathfrak q\bar t\oplus\mathfrak q{\cdot}1$, $(\mathbb W,\ell)$ изоморфна $(\tilde t\mathfrak q[\tilde t])/(\tilde t^{n+1})$ и “положительной части" алгебры $\mathfrak q\langle n{+}1\rangle$.

Скобка $\{\ ,\ \}_{t^n}$ является <u>стягиванием</u> скобки $\{\ ,\ \}_{t^n-1}$, связанным с циклической перестановкой слагаемых. В редуктивном случае $\mathfrak q=\mathfrak g$ алгебра $\mathcal Z(t^n-1,t^n)$ была изучена в [Panyushev–Y. (2021)].

Пример 6. Пусть $n\geqslant 2$. Положим $p = t^n - t$, $\tilde p = t^n$, $\ell = \{\ ,\ \}_{t^n-t} - \{\ ,\ \}_{t^n}$. Тогда

$$\ell(x\bar t^{a}, y\bar t^{b}) = \begin{cases} 0 & \text{при } a+b<n,\\ [x,y]\bar t^{b+a+1-n} & \text{при } a+b\geqslant n,\end{cases} \quad \text{если } x,y\in\mathfrak q,$$

и $(\mathbb W,\ell)\cong\mathfrak q\langle n{-}1\rangle\oplus\mathfrak q^{\mathsf{ab}}$.

Теорема. (i) Если $\mathfrak{q}=\mathfrak{g}$, $p=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$, где $a_i\neq a_j$ при $i\neq j$, и $p(0)\neq 0$, то $\mathcal{Z}(p,p+t)=\mathsf{gr}(\mathcal{C}(\vec{z}))\subset \mathcal{S}(\mathfrak{g}^{\oplus n})$ с вектором $\vec{z}=(a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1})$.

(ii) При тех же условиях на p каждый гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}_k=\sum\limits_{j\neq k}\frac{\sum_{i=1}^{\dim\mathfrak{g}}x_i^{(k)}x_i^{(j)}}{a_k-a_j}$ из $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^{\oplus n})$ с $1\leqslant k\leqslant n$ содержится в $\mathcal{Z}(p,p+1)$.

7. Некоторые пояснения

Если $p(0)\neq 0$, то отображение $\psi_p\colon \mathbb{k}[t]\to\mathbb{k}[t]/(p)$ продолжается на $\mathfrak{q}[t,t^{-1}]$ и на $\mathcal{U}(\mathfrak{q}[t^{-1}])$. Если $\mathfrak{q}=\mathfrak{g}$ и корни p различны, то мы отождествляем $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^{\oplus n}$ с $\mathfrak{q}[t]/(p)$, то есть $\mathfrak{h}=\psi_p(\mathfrak{q}[t^{-1}])$. Легко видеть, что

$$\mathcal{C}(\vec{a})=\psi_p(\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}},t^{-1})),\quad \text{если}\quad p=\textstyle\prod_i(x-a_i).$$

Далее, $\mathsf{gr}(\mathcal{C}(\vec{a}))=\psi_p(\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{g}},t^{-1}))$, где $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{g}},t^{-1})=\mathsf{gr}(\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}},t^{-1}))$.

Для любой алгебры $\mathfrak{q}$ определим $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}},t^{-1})$ как алгебру инвариантов

◇ $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}},t^{-1})=\mathcal{S}(t^{-1}\mathfrak{q}[t^{-1}])^{\mathfrak{q}[t]}$, рассматривая $\mathcal{S}(t^{-1}\mathfrak{q}[t^{-1}])$ как фактор алгебры $\mathcal{S}(\mathfrak{q}[t,t^{-1}])$ по идеалу $(\mathfrak{q}[t])$, то есть $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}},t^{-1})$ состоит из таких элементов $Y\in\mathcal{S}(t^{-1}\mathfrak{q}[t^{-1}])$, что $\{xt^k,Y\}\in\mathfrak{q}[t]\mathcal{S}(\mathfrak{q}[t,t^{-1}])$ при всех $x\in\mathfrak{q}$ и $k\geqslant 0$.

Нам будет удобнее заменить переменную: $t^{-1} \mapsto t$ в $\mathfrak{q}[t, t^{-1}]$,

то есть $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t^{-1}) \mapsto \mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t)$.

Тогда часть (i) теоремы утверждает следующее: $\mathcal{Z}(p, p+t) = \psi_p(\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{g}}, t))$.

Гипотеза 7. Для любой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{q}$ и любого нормированного многочлена $p \in \Bbbk[t]$, не имеющего 0 корнем, выполнено: $\psi_p(\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t)) = \mathcal{Z}(p, p+t)$.

8. Нередуктивные и похожие на редуктивные алгебры Ли

◇ Для любой алгебры Ли $\mathfrak{q}$ верно тождество $\{\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t), \mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t)\} = 0$.

◇ Существование алгебры $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t^{-1})$, то есть квантования алгебры $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t^{-1})$, формально говоря, не установлено. Возможно, для построения квантования, следует предполагать, что алгебра $\mathfrak{q}$ квадратична. Однако же, проблема решена положительно для централизаторов $\mathfrak{g}_\gamma$, где $\gamma \in \mathfrak{g}$ [Arakawa–Premet (2017)].

Похожие на редуктивность свойства алгебр Ли

Положим $\mathfrak{q}^*_{\mathsf{sing}} = \{\eta \in \mathfrak{q}^* \mid \dim \mathfrak{q}_\eta > \operatorname{ind} \mathfrak{q}\}$. Рассмотрим следующие условия:

$(\Diamond_1)$ $\operatorname{tr.deg} \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} = \operatorname{ind} \mathfrak{q}$ (достаточно симметрических инвариантов);

$(\Diamond_k)_{k=2,3}$ $\dim \mathfrak{q}^*_{\mathsf{sing}} \leqslant \dim \mathfrak{q} - k$ (условие codim–k);

$(\Diamond_4)$ $\mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}} = \Bbbk[F_1, \ldots, F_m]$ – кольцо многочленов от $m = \operatorname{ind} \mathfrak{q}$ переменных и $\Omega_{\mathfrak{q}^*} = \{\xi \in \mathfrak{q}^* \mid (\mathrm{d}_\xi F_1) \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}_\xi F_m) \neq 0\}$ – большое открытое подмножество в $\mathfrak{q}^*$ (то есть дополнение к $\Omega_{\mathfrak{q}^*}$ не содержит дивизоров).

Утверждения (результаты):

◇ Если выполнены условия $(\Diamond_1)$ и $(\Diamond_2)$, то $\operatorname{tr.deg} \mathcal{Z}(p, p+l) = \boldsymbol{b}^{\mathfrak{q}\cdot 1}(\mathbb{W}, [\ ,\ ]_p) = \frac{n-1}{2}(\dim \mathfrak{q} + \operatorname{ind} \mathfrak{q}) + \operatorname{ind} \mathfrak{q}$ для всех p и всех таких l, что $0 \leqslant \deg l \leqslant 1$.

◇ Если выполнены $(\Diamond_2)$ и $(\Diamond_4)$, то $\mathcal{Z}(p, p+l)$ – кольцо многочленов (при любых p и l как выше).

◇ Если выполнены $(\Diamond_3)$ и $(\Diamond_4)$, то $\mathcal{Z}(p, p+l)$ – максимальная (по включению) Пуассон-коммутативная подалгебра $(\mathcal{S}(\mathbb{W}), \{\ ,\ \}_p)^{\mathfrak{q}}$.

◇ Если выполнено $(\Diamond_4)$ и $p(0) \neq 0$, то $\mathcal{Z}(p, p+t) = \psi_p(\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t))$ (гипотеза 7 верна).

9. Идеи доказательства

Опр. 8. Рассмотрим такой вектор $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, что $0 \leqslant k_j < n$ для каждого индекса j. Тогда $\vec{k}$-поляризация элемента $Y = \prod_i y_i \in \mathcal{S}^d(\mathfrak{q})$ – это сумма

$$Y[\vec{k}] := (d!)^{-1} |\mathsf{S}_d \cdot \vec{k}| \sum_{\theta \in \mathsf{S}_d} y_1 \bar{t}^{\theta(k_1)} \ldots y_d \bar{t}^{\theta(k_d)} \in \mathcal{S}(\mathbb{W}) .$$

По линейности конструкция продолжается на все элементы $F \in \mathcal{S}^d(\mathfrak{q})$; положим $\mathsf{Pol}(F) := \left\langle F[\vec{k}] \mid \vec{k} \text{ как выше} \right\rangle$.

Теорема 9 (Raïs–Tauvel, Arakawa–Premet, Panyushev–Y.). Предположим, что $(\Diamond_4)$ выполнено для $\mathfrak{q}$. Тогда каждая алгебра Такифа $\mathfrak{q}\langle n \rangle$ имеет те же хорошие свойства, что и $\mathfrak{q}$. В частности, $\mathcal{ZS}(\mathfrak{q}\langle n \rangle)$ – кольцо многочленов от $\mathsf{ind}\, \mathfrak{q}\langle n \rangle = nm$ переменных (образующих), причём образующие являются поляризациями многочленов F_j с $1 \leqslant j \leqslant m$.

Подстановка $t = 1$ определяет изоморфизм $\mathfrak{q}$-модулей $\mathsf{Ev}_1 : \mathcal{S}(\mathfrak{q}t) \to \mathcal{S}(\mathfrak{q})$. Если $F \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$, то положим $F[t] := \mathsf{Ev}_1^{-1}(F) \in \mathcal{S}(\mathfrak{q}t)$. Если $F \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$, то имеем $F[t] \in \mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t)$. Также положим $\tau = t^2 \partial_t$.

Следствие 10. Если $\mathfrak{q}$ удовлетворяет $(\Diamond_4)$, то $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t)$ – кольцо многочленов, порожденное $\tau^k(F_j[t])$ при $k \geqslant 0$ и $1 \leqslant j \leqslant m$.

Предположим, что $(\Diamond_4)$ выполнено для $\mathfrak{q}$. С одной стороны, каждая алгебра $\mathcal{Z}_p$, а следовательно и каждая $\mathcal{Z}(p, p+l)$, порождается поляризациями инвараинтов F_j; с другой стороны, $\psi_p(\tau^k(F_j[t])) \in \mathsf{Pol}(F_j)$ для всех j и k.

Предположим, что $\mathfrak{q}$ квадратична и что $\boldsymbol{h} \in \mathcal{S}^2(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$ – невырожденное скалярное произведение на $\mathfrak{q}^*$. (Если $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}$ полупроста, то возьмем двойственную к $\varkappa$ форму.) Тогда $\boldsymbol{h}[t] \in \mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t)$ и $\boldsymbol{h}[t] \in \mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t)$.

Пусть $n \geqslant 2$. Как легко видеть, $\boldsymbol{h}[(1,1)] = \psi_p(\boldsymbol{h}[t]) \in \psi_p(\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t))$ для любого p. Также можно проверить, что $\boldsymbol{h}[(1,1)] \in \mathcal{Z}(p, p+t)$ для любого p.

Предложение 11. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_d$ и $F \in \mathcal{S}^d(\mathfrak{g})$ задан равенством $F(\xi) = \det(\xi)$ при $\xi \in \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{sl}_d$. Тогда для любого многочлена p степени n получаем

$$\dim\{f \in \mathsf{Pol}(F) \mid \{f, \boldsymbol{h}[(1,1)]\}_p = 0\} \leqslant (n-1)d + 1.$$

Из этого неравенства можно вывести: $\dim(\mathsf{Pol}(F) \cap \mathcal{Z}(p, p+l)) = (n-1)d+1$ и $\mathsf{Pol}(F) \cap \mathcal{Z}(p, p+t) = \mathsf{Pol}(F) \cap \psi_p(\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}}, t))$, если $F \in \mathcal{S}^d(\mathfrak{q})^{\mathfrak{q}}$ неравен нулю и $p(0) \neq 0$. Причём тождества верны для всех алгебр $\mathfrak{q}$, необязательно квадратичных.

Теорема 12. Если $(\Diamond_4)$ выполнено для $\mathfrak{q}$, то

$$\mathcal{Z}(p,p+t)=\mathsf{alg}\langle(\mathsf{Pol}(F_j)\cap\mathcal{Z}(p,p+l))\mid 1\leqslant j\leqslant m\rangle=\psi_p(\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{q}},t)).$$

Замечание (редуктивный случай). Согласно [Рыбников (2008)], алгебра $\mathfrak{z}(\widehat{\mathfrak{g}},t)$ – это централизатор $\boldsymbol{h}[t]$ в $\mathcal{U}(t\mathfrak{g}[t])$, а $\mathcal{Z}(\widehat{\mathfrak{g}},t)$ – пуассонов централизатор $\boldsymbol{h}[t]$ в $\mathcal{S}(t\mathfrak{g}[t])$.

Наличие $\boldsymbol{h}$ позволяет выбрать ортонормальный базис $\{x_i\}\subset\mathfrak{q}$ и определить (обобщенные) квадратичные гамильтонианы Годена теми же формулами, что и в редуктивном случае (2).

Пример 13 (Связь между $\psi_p\circ\tau^k(\boldsymbol{h}[t])$ и $\mathcal{H}_k$). Пусть $p=\prod_i(t-a_i)$, корни различны, $\vec{z}=(a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1})$. Вернемся к определённым в примере 3 многочленам $\bar{r}_i$. Заметим, что $\bar{t}=\sum_i a_i\bar{r}_i$. Пусть $\boldsymbol{h}[\bar{r}_i]\in\mathcal{S}^2(\mathfrak{q}\bar{r}_i)^{\mathfrak{q}}$ – это образ $\boldsymbol{h}$ относительно канонического изоморфизма, заданного заменой $x\mapsto x\bar{r}_i$ (здесь $x\in\mathfrak{q}$). Тогда

$$\boldsymbol{h}[(1,1)]=\sum_{j=1}^{\dim\mathfrak{q}}(x_j\bar{t})^2=-2\left(\sum_k a_k\mathcal{H}_k\right)+\sum_k a_k^2\boldsymbol{h}[\bar{r}_k].$$

Далее, $\dim\{f\in\mathsf{Pol}(\boldsymbol{h})\mid\{f,\boldsymbol{h}[(1,1)]\}_p=0\}=2n-1$ и это подпространство имеет следующий базис: $\{\mathcal{H}_k,\ \boldsymbol{h}[\bar{r}_j]\mid 1\leqslant k<n,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.

Это пространство имеет другие базисы, например, $\{\psi_p \circ \tau^k(\boldsymbol{h}[t]) \mid 0 \leqslant k < 2n-1\}$ или $\{\boldsymbol{h}[(1,1)],\ \psi_p \circ \tau(\boldsymbol{h}[t]), \ldots, \psi_p \circ \tau^{n-2}(\boldsymbol{h}[t]),\ \boldsymbol{h}[\bar{r}_j] \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$.

Можно сказать, что (обобщенная) модель Годена $(\mathfrak{q}^{\oplus n}, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n)$ эквивалентна $(\mathbb{W}, [\ ,\ ]_p, \boldsymbol{h}[(1,1)], \psi_p \circ \tau(\boldsymbol{h}[t]), \ldots, \psi_p \circ \tau^{n-2}(\boldsymbol{h}[t]))$. Причём при $k \leqslant n-2$ элементы $\psi_p \circ \tau^k(\boldsymbol{h}[t])$ не зависят от p

$$\psi_p \circ \tau^k(\boldsymbol{h}[t]) = k! \sum_{1 \leqslant a,b;\ a+b=k+2} \left(\sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{q}} x_i \bar{t}^a x_i \bar{t}^b \right).$$

9. Другие версии

С алгеброй петель $\mathfrak{g}[t, t^{-1}] = \ldots \oplus \mathfrak{g}t^{-k} \oplus \mathfrak{g}t^{-1} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}t \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}t^k \oplus \ldots$ связаны разные Пуассон-коммутативные подалгебры, $\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{g}}, t) = \mathcal{S}(t\mathfrak{g}[t])^{\mathfrak{g}[t^{-1}]}$, $\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{g}}, t^{-1}) = \mathcal{S}(t^{-1}\mathfrak{g}[t^{-1}])^{\mathfrak{g}[t]}$, или, например,

$$\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{g}}, [0]) = \mathcal{S}(\mathfrak{g}[t])^{\mathfrak{g}[t^{-1}]} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{g}}, \varepsilon t + 1).$$

Пусть $p(0) \neq 0$. Как мы уже знаем, $\psi_p(\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{g}}, t)) = \mathcal{Z}(p, p+t)$. Кроме того,

$$\psi_p(\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{g}}, t^{-1})) = \mathcal{Z}(p, p+1) = \psi_p(\mathcal{Z}(\hat{\mathfrak{g}}, [0])).$$