# Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 6.

Теретёнков Александр Евгеньевич

7 марта 2022 г.

# В прошлом семестре...

В результате усреднения по пуассоновскому случайному процессу получался ГКСЛ-генератор

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \qquad \mathcal{L}(\rho) = \lambda(U\rho U^\dagger - \rho), \qquad \lambda \geqslant 0,$$

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

В общем случае можно рассмартривать сложный Пуасcновский процесс, тогда

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t), \qquad \mathcal{L}(\rho) = \int_{\Omega} \lambda(dp)(U_p \rho U_p^{\dagger} - \rho), \qquad \lambda(dp) \geqslant 0,$$

$$U_p = e^{-\frac{i}{2}\mathfrak{a}^T H_p \mathfrak{a}},$$

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

**Лемма.**

$$\mathcal{L}^*(\hat{X}) = \int_\Omega \lambda(dp)(U_p^\dagger \hat{X} U_p - \hat{X}).$$

**Лемма.** Пусть $H = H^T \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$, тогда

$$e^{\frac{i}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a}} \mathfrak{a} e^{-\frac{i}{2}\mathfrak{a}^T H \mathfrak{a}} = S\mathfrak{a}, \qquad S = e^{iJH}.$$

**Лемма.**

$$\mathcal{L}^*(\otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}) = \int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M}) \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}, \quad S_p = e^{iJH_p}.$$

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

**Утверждение.** Пусть

$$U_p = e^{-\frac{i}{2}\mathfrak{a}^T H_p \mathfrak{a}},$$

где $H_p = H_p^T = \tilde{H}_p \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ — непрерывная функция и $\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}\rangle_0 < \infty$, тогда:
Динамика моментов определяется формулой

$$\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}\rangle_t = \exp\left(\int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})t\right)\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}\rangle_0,$$

где $S_p = e^{iJH_p}$, $\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a}\rangle_t \equiv \mathrm{tr}\,(\rho_t \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a})$, $I_{(2n)^m}$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^{2n} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{(2n)^m}$.

**Доказательство:** Уравнение ГКСЛ в представлении Гейзенберга для оператора $\hat{X}_t = (\otimes_{m=1}^M \mathfrak{a})_t$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\otimes_{m=1}^M \mathfrak{a})_t = \int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})(\otimes_{m=1}^M \mathfrak{a})_t.$$

Полученное уравнение является линейным обыкновенным уравнением относительно операторно-значного тензора $(\otimes_{m=1}^M \mathfrak{a})_t$ . Тогда решение может быть представлено посредством матричной экспоненты от $(2n)^M \times (2n)^M$-матрицы $\int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})t$, а именно

$$(\otimes_{m=1}^M \mathfrak{a})_t = e^{\int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M S_p - I_{(2n)^M})t}(\otimes_{m=1}^M \mathfrak{a})_0.$$

Усредняя по начальной матрице плотности получаем требуемое. $\square$

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

В частности, для первых и вторых моментов имеем

$$\langle \mathfrak{a} \rangle_t = e^{\int \lambda(dp)(S_p - I_{2n})t} \langle \mathfrak{a} \rangle_0,$$
$$\langle \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \rangle_t = e^{\int \lambda(dp)(S_p \otimes S_p - I_{4n^2})t} \langle \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \rangle_0.$$

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

**Замечание.** Можно проверить, что такая динамика не переводит гауссовские состояния в гауссовские. Это пример, когда динамика моментов (и как мы увидим далее и корреляционных функций) считается в более явном виде, нежели динамика матрицы плотности.

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

По обобщённой регрессионной формуле для упорядоченных по времени корреляционных функций $t_M \geqslant \dots \geqslant t_1$:

$$\langle \mathfrak{a}_{j_M}(t_M)\dots\mathfrak{a}_{j_1}(t_1)\rangle \equiv$$

$$\equiv \mathrm{tr}\,(\mathfrak{a}_{j_M}\exp(\mathcal{L}(t_M - t_{M-1}))\dots\mathfrak{a}_{j_2}\exp(\mathcal{L}(t_2 - t_1))\mathfrak{a}_{j_1}\exp(\mathcal{L}t_1)\rho_0)$$

**Лемма.**(Переход в представление Гейзенберга)

$$\mathrm{tr}\,(\mathfrak{a}_{j_M}\exp(\mathcal{L}(t_M - t_{M-1}))\dots\mathfrak{a}_{j_2}\exp(\mathcal{L}(t_2 - t_1))\mathfrak{a}_{j_1}\exp(\mathcal{L}t_1)\rho_0) =$$

$$= \mathrm{tr}\,\rho_0 e^{\mathcal{L}^* t_1}((\exp(\mathcal{L}^*(t_2 - t_1))((\dots\exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}_{j_M}\dots)\mathfrak{a}_{j_2}))\mathfrak{a}_{j_1}).$$

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

**Утверждение.** Если определить
$L_{M,m} \equiv \int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{r=1}^m S_p - I_{(2n)^m}) \otimes I_{(2n)^{M-m}}$, $m = 1, \ldots, M$,
то динамика марковских многовременных упорядоченных корреляционных функций имеет вид

$$\langle \mathfrak{a}(t_M) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{a}(t_1) \rangle = \exp(L_{M,1}(t_M - t_{M-1})) \ldots \exp(L_{M,M} t_1) \langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{a} \rangle_0.$$

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

$$\exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}_{j_M} = (\exp(L_{1,1}(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a})_{j_M}.$$

$$\begin{aligned}
&\exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))((\exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}_{j_M})\mathfrak{a}_{j_{M-1}}) = \\
&= \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))((\exp(L_{1,1}(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a})_{j_M}\mathfrak{a}_{j_{M-1}}) = \\
&= \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))((\exp(L_{1,1}(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}) \otimes \mathfrak{a})_{j_M j_{M-1}} = \\
&= \exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))(\exp(L_{2,1}(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})_{j_M j_{M-1}} = \\
&= (\exp(L_{2,1}(t_M - t_{M-1}))\exp(\mathcal{L}^*(t_{M-1} - t_{M-2}))(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}))_{j_M j_{M-1}} = \\
&= (\exp(L_{2,1}(t_M - t_{M-1}))\exp(L_{2,2}(t_M - t_{M-2}))\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a})_{j_M j_{M-1}}.
\end{aligned}$$

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

Аналогично,

$$\exp(\mathcal{L}^* t_1)((\exp(\mathcal{L}^*(t_2 - t_1))((\ldots \exp(\mathcal{L}^*(t_M - t_{M-1}))\mathfrak{a}_{j_M} \ldots)\mathfrak{a}_{j_2}))\mathfrak{a}_{j_1}) =$$
$$= \exp(L_{M,1}(t_M - t_{M-1})) \ldots \exp(L_{M,M} t_1) \otimes_{m=1}^{M} \mathfrak{a}.$$

Усредняя по начальной матрице плотности получаем требуемое. $\square$

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

**Упражнение.** Вычислите $\langle \mathfrak{a}(t_2) \otimes \mathfrak{a}(t_1) \rangle$ при $t_2 < t_1$.

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

**Утверждение.** (Фермионный случай) Пусть

$$U_p = \exp(-(i/2)\mathfrak{c}^T H_p \mathfrak{c}), \qquad H_p = -H_p^T = -\tilde{H}_p \in \mathbb{C}^{2n \times 2n},$$

тогда
1) Динамика моментов определяется формулой

$$\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_t = \exp\left( \int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{m=1}^M O_p - I_{(2n)^M})t \right) \langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_0,$$

где $O_p = \exp(-iEH_p)$, $\langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_t \equiv \mathrm{tr}\, (\rho_t \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c})$, $I_{(2n)^m}$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^{2n} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^{(2n)^m}$.

# Квадратичная динамика усреднённая по Пуассоновскому процессу

2) Если определить
$L_{M,m} \equiv \int_\Omega \lambda(dp)(\otimes_{r=1}^m O_p - I_{(2n)^m}) \otimes I_{(2n)^{M-m}}$, $m = 1, \ldots, M$,
то динамика марковских многовременных упорядоченных корреляционных функций имеет вид

$$\langle \mathfrak{c}(t_M) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{c}(t_1) \rangle =$$
$$= \exp(L_{M,1}(t_M - t_{M-1})) \ldots \exp(L_{M,M} t_1) \langle \otimes_{m=1}^M \mathfrak{c} \rangle_0,$$

где $t_M \geqslant \ldots \geqslant t_1 \geqslant 0$.

# Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Спин-бозон
$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$

$$\hat{H}_{\mathrm{SB}} = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk +$$
$$+ \Omega |1\rangle\langle 1| \otimes I + (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \otimes \int \left( g_k^* b_k^\dagger + g_k b_k \right) dk.$$

$b_k^\dagger$ и $b_k$ — операторы рождения и уничтожения удовлетворяющие ККС

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$$

Вакуум

$$b_k |\mathrm{vac}\rangle = 0$$

# Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Приближение вращающейся волны

$$\hat{H}_0 = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega |1\rangle\langle 1| \otimes I$$

$$\hat{H}_I = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \otimes \int \left( g_k^* b_k^\dagger + g_k b_k \right) dk.$$

$$\hat{H}_{\mathrm{SB,I}}(t) \equiv e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}_I e^{-i\hat{H}_0 t} =$$

$$= (e^{-i\Omega t}|0\rangle\langle 1| + e^{i\Omega t}|1\rangle\langle 0|) \otimes \int \left( e^{i\omega_k t} g_k^* b_k^\dagger + g_k e^{-i\omega_k t} b_k \right) dk =$$

$$= \int \Bigg( e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger + e^{i(\omega_k + \Omega)t} g_k^* |1\rangle\langle 0| \otimes b_k^\dagger +$$

$$+ e^{-i(\omega_k + \Omega)t} g_k |0\rangle\langle 1| \otimes b_k + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} |1\rangle\langle 0| \otimes b_k \Bigg) dk \approx$$

$$\approx \int \left( e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} |1\rangle\langle 0| \otimes b_k \right) dk = \hat{H}_{\mathrm{SB,I}}^{\mathrm{RWA}}(t)$$

# Спин-бозон в приближении вращающейся волны

$$\hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}} \equiv e^{-i\hat{H}_0 t}\hat{H}_{\mathrm{SB,I}}^{\mathrm{RWA}}(t)e^{i\hat{H}_0 t} =$$
$$= \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega|1\rangle\langle 1| \otimes I +$$
$$+ \int \left( g_k^* |0\rangle\langle 1| \otimes b_k^\dagger + g_k |1\rangle\langle 0| \otimes b_k \right) dk.$$

$$\hat{N} = \int I \otimes b_k^\dagger b_k dk + |1\rangle\langle 1| \otimes I$$

$$[\hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}}, \hat{N}] = 0$$

# Спин-бозон в приближении вращающейся волны

Проектор на 0-частичное подпространство

$$P_0 = |0\rangle\langle 0| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}|$$

Проектор на 1-частичное подпространство

$$P_1 = |1\rangle\langle 1| \otimes |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| + \int |0\rangle\langle 0| \otimes b_k^\dagger |\mathrm{vac}\rangle\langle \mathrm{vac}| b_k$$

$$[P_i, \hat{H}_{\mathrm{SB}}^{\mathrm{RWA}}] = 0$$