Moscow, 16.03.2022

16 марта 2022 г. 12:53

Центрально порождённые примитивные пуассоновы идеалы в симметрических алгебрах локально нильпотентных алгебр Ли

A – ассоциативная алгебра с 1 $/\mathbb{C}$

$\mathcal{J} \lhd A$ – примитивный $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{J} = \mathrm{Ann}_A V$

V – простой A-mod

$\mathcal{J}\mathrm{Spec}\, A$ = все примитивные идеалы

топология Джекобсона

$I \lhd A$ – радикальный $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $I = \bigcap$ примитивных

$Z_I = \{ \mathcal{J} \in \mathcal{J}\mathrm{Spec}\, A \mid I \subset \mathcal{J} \}$ – замкнутые

<u>Пример</u> $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$

$\mathcal{J}\mathrm{Spec}\, A = \mathrm{Max\,Spec}\, A = \mathbb{A}^n$

топология Зарисского

Пусть S – пуассонова алгебра $\{\, , \,\}$

$\mathrm{PSpec}\, S$ – мн-во примитивных пуассоновых идеалов

$I \lhd S$ – пуассонов $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\{I, S\} \subset I$

примитивный $\Leftrightarrow$ наибольший пуассонов идеал в каком-то максимальном идеале алгебры S.

I – радикальный пуассонов $\Leftrightarrow$ Z_I

$Z_I = \{ \mathcal{J} \in \mathrm{PSpec}\, S \mid I \subset \mathcal{J} \}$

пуассонова топология.

Метод орбит для нильпотентных алгебр Ли

$\mathfrak{n}$ — нильп алгебра Ли $/\mathbb{C}$, $\dim \mathfrak{n} < \infty$

неприводимые представления алгебры $\mathfrak{n}$ = ?

✓ • описать пр-во $\mathrm{JSpec}\, U(\mathfrak{n})$

× • $\forall J \in \mathrm{JSpec}\, U(\mathfrak{n})$ описать все точные неприв представления алгебры $U(\mathfrak{n})/J$

$\lambda \in \mathfrak{n}^* \longrightarrow \mathfrak{p} \subset \mathfrak{n}$ — поляризация для λ ($\exists$, M Vergne)

- подалгебра
- макс изотропная $x, y \mapsto \lambda([x,y])$

$\lambda|_{\mathfrak{p}}: \mathfrak{p} \to \mathbb{C}$ — 1-мерное представление

$$\mathrm{Ann}\Big(\underbrace{\mathrm{ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{n}} \lambda|_{\mathfrak{p}}}_{\text{неприв для спец } \mathfrak{p}}\Big) = J(\lambda) \text{ не зависит от } \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad J(\lambda) \in \mathrm{JSpec}\, U(\mathfrak{n})$$

- $\forall J \in \mathrm{JSpec}\, U(\mathfrak{n}) \ \exists \lambda \in \mathfrak{n}^*: \ J = J(\lambda)$
- $J(\lambda_1) = J(\lambda_2) \Leftrightarrow N\cdot\lambda_1 = N\cdot\lambda_2$

$$\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}\, N, \quad N \curvearrowright \mathfrak{n} \Rightarrow N \curvearrowright \mathfrak{n}^*$$

$$\mathfrak{n}^*/N \ \underset{\approx}{\overset{1-1}{\longleftrightarrow}} \ \mathrm{JSpec}\, U(\mathfrak{n})$$

фактор топология — топология Джекобсона

отображение Диксмье

$S(\mathfrak{n})$ — симметрическая алгебра

$\{x, y\} = [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{n}$

радикальные идеалы в $S(\mathfrak{n}) \Longleftrightarrow$ замкнутые подмн-ва в $\mathfrak{n}^*$

$S(\mathfrak{n}) = \mathbb{C}[\mathfrak{n}^*]$

рад пуассоновы идеалы в $S(\mathfrak{n}) \Longleftrightarrow$ замкнутые N-инвариантные подмн-ва в $\mathfrak{n}^*$

$$\underline{\mathrm{PSpec}}\, S(\mathfrak{n}) \xleftrightarrow{\approx} \mathfrak{n}^*/N \xleftrightarrow{\approx} \underline{\mathrm{JSpec}\, U}(\mathfrak{n}).$$

$Z(\mathfrak{n})$ = центр алгебры $U(\mathfrak{n})$

$Y(\mathfrak{n})$ = пуассонов центр алгебры $S(\mathfrak{n})$.

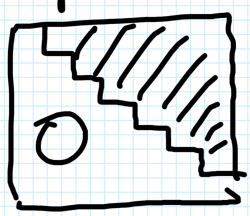
$S(\mathfrak{n}) \longrightarrow U(\mathfrak{n})$ — отображение симметризации

$Z(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\sim} Y(\mathfrak{n})$ — изоморфизм алгебр.

<u>Пример</u> $\mathfrak{g}$ — простая $\mathbb{C}$ алгебра Ли

$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ — борелевская

её нильрадикал

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{n}$ = 

Для таких $\mathfrak{n}$ известно описание $Z(\mathfrak{n})$

Это алгебра многочленов

Нужно базис Γ и каскад Костанта

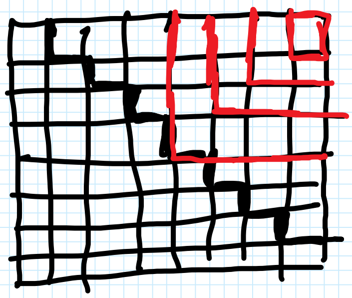
Φ — система корней, Φ^{+} — положительные корни.

β_1 – макс. корень

$\Phi_1^+ = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha \perp \beta_1\} \ni \beta_2$ – макс.

$\Phi^+ = A_{n-1}^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ 1 \le i < j \le n\}$

$\varepsilon_1 - \varepsilon_n,\ \varepsilon_2 - \varepsilon_{n-1},\ \varepsilon_3 - \varepsilon_{n-2},\ \dots$



$\Delta_i \in Z(\mathfrak{n})$

$\mathfrak{n}^* \underset{tr}{\cong} \mathfrak{n}_-$

<u>Факт</u> $(\forall \mathfrak{n})$

- несложно проверить, что почти любой $J \in J\mathrm{Spec}\, U(\mathfrak{n})$ центрально порожден $\iff$ в $\mathfrak{n}^*$ $\exists$ открытое плотное N-инв подмн-во $\Omega \subset \mathfrak{n}^*$ такое, что $\forall \lambda \in \Omega$ $J(\lambda)$ центрально порожден
- $\forall \lambda \in \Omega$ $I(\lambda)$ центрально порожден идеал орбиты λ

<u>Пример</u> $\mathfrak{n}$ – нильрадикал борелевской подалгебры в простой алгебре $\mathfrak{g}$

$\langle \Delta_i,\ i = \overline{1,k} \rangle = Z(\mathfrak{n})$

$\exists c_i: \quad \Delta_i - c_i \in J(\lambda)$

$J(\lambda)$ центрально порожден $\iff$ $c_i \neq 0$

Доклады: нильпотентные алгебры Ли

Локально нильпотентные алгебры Ли

$n_1 \subset n_2 \subset n_3 \subset \dots$ — конечномерные нильпотентные

$n = \varinjlim n_k$ $\quad \boxed{\dim n = \infty}$

Пример 1) $n = \mathfrak{hei}_\infty(\mathbb{C}) =$ (нильпотентная)

$= \langle x_i, y_i, i \in \mathbb{N}, z \mid [x_i, y_i] = z \rangle$

$n_k = \langle x_i, y_i, i = \overline{1,k}, z \rangle \triangleleft n$

цокольная

2) $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_3 \subset \dots$ — простые $\check{A}_n, \underline{B_n}, \check{C}_n, \underline{D_n}$

$\begin{pmatrix} sl_n & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ 0 \; - & 0 \end{pmatrix} sl_{n+1}$

$\mathfrak{g} = \varinjlim \mathfrak{g}_k$

простая финитарная алгебра Ли

$\underline{\mathfrak{sl}_\infty}, \mathfrak{so}_\infty, \underline{\mathfrak{sp}_\infty}$

$\mathfrak{h}$ = расщепляющая картановская подалгебра (диагональные)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}^\alpha$

$\Phi = \langle \varepsilon_i - \varepsilon_j, i \neq j \rangle$

$\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \Rightarrow \mathfrak{g}^\alpha = \langle e_{ij} \rangle$

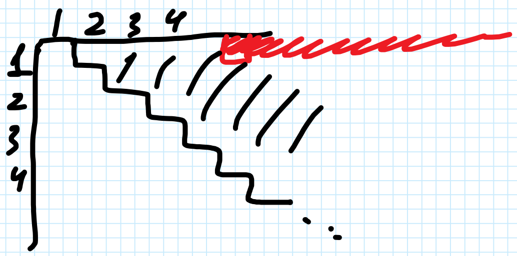
$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus n$ — расщепляющая борелевская подалгебра

Фиксируем линейный порядок $\prec$ на $\mathbb{N}$

$\Phi^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j,\ i \prec j\}$

$\mathfrak{n} = \langle e_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+ \rangle_{\mathbb{C}}$ — лок нильп нильп-алгебра Ли-Дынкина.

2а) $1 \prec 2 \prec 3 \prec$

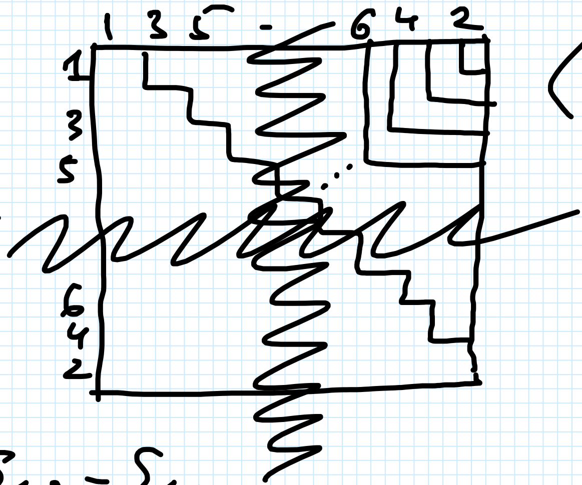
$\mathfrak{n} =$ 

$z(\mathfrak{n}) = \{0\}$

$Z(\mathfrak{n}) = \mathbb{C}$

не нильп,
не цокольная

2б) $1 \prec 3 \prec 5 \prec \ldots \prec 6 \prec 4 \prec 2$

$\mathfrak{n} =$ 

$\langle \Delta_1, \Delta_2, \ \rangle = Z(\mathfrak{n})$

$\varepsilon_{i1} - \varepsilon_{j1},\ \varepsilon_{i2} - \varepsilon_{j2}, \ldots$

2в) $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Q}$

Теорема (А Петухов, МИ, '21)
$\exists$ гомеоморфизм
$\mathrm{PSpec}\, S(\mathfrak{n}) \approx \mathrm{JSpec}\, U(\mathfrak{n})$

Вопрос: как сюда вовлечь орбиты?

Пример $\quad \mathfrak{n} = \mathfrak{heis}_\infty(\mathbb{C}) = \langle x_i, y_i, z\rangle$

$\mathcal{J}\operatorname{Spec} U(\mathfrak{n}) \ni \mathcal{J} \qquad\qquad Z(\mathfrak{n}) = \langle z\rangle$

$\mathcal{J} \ni z - c, \quad c \in \mathbb{C} \qquad \boxed{\lambda(z) \neq 0}$

а) $c \neq 0 \Rightarrow \mathcal{J} \overset{=\mathcal{J}(\lambda)}{=} \langle z - c\rangle$

б) $c = 0 \Rightarrow \mathcal{J} \overset{=\mathcal{J}(\lambda)}{=} \langle z, x_i - a_i, y_i - b_i\rangle$

$a_i, b_i \in \mathbb{C}$ -

$$N = \exp\mathfrak{n} = \varinjlim \exp\mathfrak{n}_k$$

$\lambda \in \mathfrak{n}^* \qquad \lambda(z) = c \neq 0$

$$N\cdot\lambda = \{\mu \in \mathfrak{n}^* \mid \mu(z) = c,\ \mu(x_i) = \lambda(x_i),\ \mu(y_i) = \lambda(y_i) \text{ для почти всех } i\}$$

Факт для локальной алгебры Ли такую группу построить можно

$$\mathfrak{n} = \varinjlim \mathfrak{n}_k$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{рад пуасс}\\ \text{идеалы в } S(\mathfrak{n}_k)\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{рад идеалы}\\ \text{в } U(\mathfrak{n}_k)\end{array}\right\}$

$\mathfrak{n}_k \hookrightarrow \mathfrak{n}_{k+1}$

$\underset{\text{рад пуасс}}{I \lhd S(\mathfrak{n}_{k+1})} \longmapsto \mathcal{J}(I) \lhd U(\mathfrak{n}_{k+1})$

$\mathcal{J}(I) \overset{\shortparallel}{\cap} U(\mathfrak{n}_k) \overset{\text{рад}}{\lhd}$

$I \cap S(\mathfrak{n}_k) \lhd S(\mathfrak{n}_k) \longmapsto \overset{\shortparallel}{\mathcal{J}}(I \cap S(\mathfrak{n}_k))$

рад пуасс $\quad\quad \trianglelefteq_{рад} U(\mathfrak{n}_k)$

$$\left\{\begin{matrix}\text{рад пуассоновы}\\ \text{идеалы в } S(\mathfrak{n})\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{\begin{matrix}\text{рад. идеалы}\\ \text{в } U(\mathfrak{n})\end{matrix}\right\}$$

Центр порождает прим пуасс идеалы

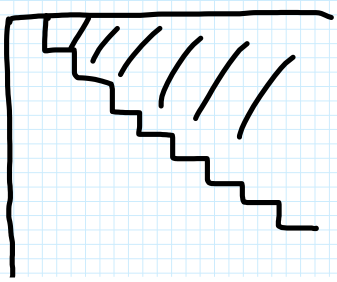
<u>Теорема</u> На $\mathfrak{n}^*$ $\exists$ топология такая, что в $\mathfrak{n}^*$ есть открытое плотное мн-во $\Omega \subset \mathfrak{n}^*$ такое что для $\lambda \in \Omega$ $I(\lambda)$ порождается как идеал своим пересечением с $Y(\mathfrak{n})$

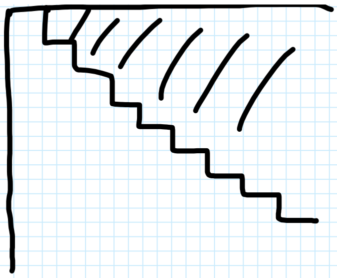
- на $\mathfrak{n}^*$ есть топология Зарисского, задаваемая с помощью $S(\mathfrak{n})$

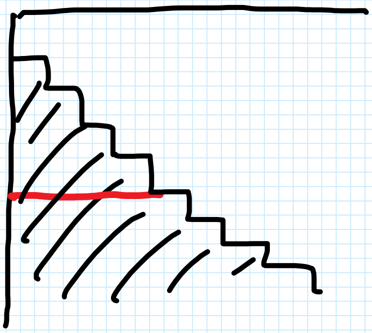
<u>Опр</u> Объявим замкнутыми в нашей топологии счётные объединения замкнутых по Зарисскому подмножеств

<u>Утв</u> $\mathfrak{n}^*$ неприводимо в этой топологии

<u>Пример</u> 1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ замкнуто.

2) $\mathfrak{n} =$  финитарные

2) $\mathfrak{n} =$  финитарные

$\mathfrak{n}^* =$  $\forall$

$\lambda(x) = \mathrm{tr}(\lambda x)$

$\Omega = \{\lambda \in \mathfrak{n}^* \mid$ все миноры $\neq 0\}$.

Вопрос • перенести это на Ядре $U(\mathfrak{n})$

• сделать это для произв лок нильп алгебр Ли

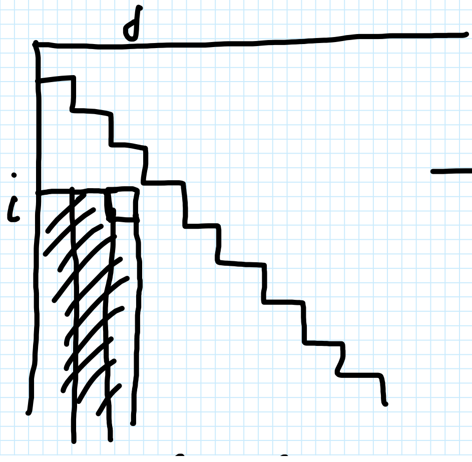
$\mathfrak{n}$ — ниль-алгебра Ли-Дынкина

$\lambda \in \mathfrak{n}^* \longmapsto I(\lambda) \neq \{0\}$?

• $Z(\mathfrak{n}) \neq \mathbb{C} \Rightarrow I(\lambda) \neq \{0\}$

• $Z(\mathfrak{n}) = \mathbb{C}$

λ_i^j — подматрица

$\lambda =$ 

Критерий

$I(\lambda) \neq 0$

$\Updownarrow$

$\exists\, i, j$ т.к. λ_i^j не макс.

Аналогичный критерий можно сформулировать и для B_∞, C_∞, D_∞

$\dim n < \infty \qquad n_1 \subset n_2 \subset \dots \subset n_s = n$

$$\beta_\lambda(x,y) = \lambda([x,y]) \qquad \beta_i = \beta_\lambda|_{n_i}$$

$$p = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \beta_i \Rightarrow \operatorname{ind}_n^p \chi_p \text{ — неприв.}$$

$$\lambda \mapsto \cancel{p} \mapsto \chi_p \mapsto \operatorname{ind}_p^n \chi_p$$