Введение в алгебраическую логику: ультрапроизведения структур и теорема Лося

Станислав Олегович Сперанский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

(МЦМУ МИАН)

Весна 2022

Prelude: Фильтры на множествах

Зафиксируем какое-нибудь множество I. Говорят, что $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ является фильтром на I, если:

- $I \in F$;
- для любых $A \in F$ и $B \in F$ верно $A \cap B \in F$;
- для любых $A \in F$ и $B \subseteq I$, если $A \subseteq B$, то $B \in F$.

Под тривиальным фильтром понимают само $\mathcal{P}(I)$. Стало быть, фильтр тривиален т.т.т., когда он содержит $\varnothing$.

Будем называть $S \subseteq \mathcal{P}(I)$ центрированным, если $A_0 \cap \ldots \cap A_k \neq \varnothing$ для всех $A_0, \ldots, A_k \in S$.

Утверждение

Пусть $I \neq \varnothing$. Тогда для любого центрированного $S \subseteq \mathcal{P}(I)$ найдётся нетривиальный фильтр F на I такой, что $S \subseteq F$.

Доказательство.

Пусть S — центрированное множество подмножество I. Если $S = \varnothing$, то можно взять $F := \{I\}$. В противном случае рассмотрим

$$F \ := \ \{A \subseteq I \mid A_0 \cap \ldots \cap A_k \subseteq A \text{ для некоторых } A_0, \ldots, A_k \in S\}.$$

Легко проверить, что $S \subseteq F$ и F — нетривиальный фильтр на I. $\square$

Нетривиальный фильтр F на I называют ультрафильтром, если для любого $A \subseteq I$ верно $A \in F$ или $I \setminus A \in F$.

Утверждение

Для каждого нетривиального фильтра F на I с.у.е.:

1. F — ультрафильтр на I;
2. F максимален (по включению) среди нетрив. фильтров на I;
3. для любых $A, B \subseteq I$, если $A \cup B \in F$, то $A \in F$ или $B \in F$.

Доказательство.

Остаётся в качестве упражнения. $\square$

Утверждение

Для любого нетривиального фильтра F на I найдётся ультрафильтр U такой, что $F \subseteq U$.

Доказательство.

Пусть F — нетривиальный фильтр на I. Рассмотрим

$$\mathscr{S} \;:=\; \{S \mid S \text{ — нетривиальный фильтр на } I \text{ и } F \subseteq S\}.$$

Легко понять, что $\mathscr{S}$ с порядком по включению удовлетворяет условиям леммы Цорна. Стало быть, в $\mathscr{S}$ есть макс. элемент. $\square$

Прямые произведения структур

Пусть $\langle \mathfrak{A}_i : i \in I \rangle$ — индексированное семейство σ-структур. Прямое произведение данного семейства — обозн. через $\Pi_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ — определяется так же, как и в случае алгебр, но с добавлением:

- для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$,

$$(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in P^{\mathfrak{A}} \quad :\Longleftrightarrow$$
$$(\mathbf{a}_1(i), \ldots, \mathbf{a}_n(i)) \in P^{\mathfrak{A}_i} \text{ для всех } i \in I.$$

Здесь $\mathfrak{A}$ — сокращение для $\Pi_{i \in I} \mathfrak{A}_i$.

Замечание

Очевидно, значения термов в $\mathfrak{A}$ будут вычисляться так же, как и в случае алгебр, т.е. «покомпонентно» — см. утверждение 4.2.

Фильтрованные произведения структур

Пусть $\langle \mathfrak{A}_i : i \in I \rangle$ — индексированное семейство σ-структур, а F — произвольный фильтр на I. Определим бинарное отношение $\sim_F$ на $\Pi_{i \in I} A_i$ по правилу

$$\mathbf{a} \sim_F \mathbf{b} \quad :\Longleftrightarrow \quad \{ i \in I \mid \mathbf{a}(i) = \mathbf{b}(i) \} \in F.$$

Ясно, что $\sim_F$ окажется эквивалентностью. Будем обозначать класс эквивалентности **a** по $\sim_F$ через $\mathbf{a}/F$.

Далее, рассмотрим σ-структуру $\mathfrak{A}^F$ с носителем $\{ \mathbf{a}/F \mid \mathbf{a} \in \Pi_{i \in I} A_i \}$, определённую следующим образом:

- для любого $c \in \mathrm{Conts}_\sigma$,

$$c^{\mathfrak{A}^F} \; := \; c^{\mathfrak{A}}/F,$$

  где $\mathfrak{A}$ — сокращение для $\Pi_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, разумеется;

- для любого m-местного $f \in \mathrm{Func}_\sigma$,

$$f^{\mathfrak{A}^F}(\mathbf{a}_1/F, \ldots, \mathbf{a}_m/F) \ := \ f^{\mathfrak{A}}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)/F;$$

- для любого n-местного $P \in \mathrm{Pred}_\sigma$,

$$(\mathbf{a}_1/F, \ldots, \mathbf{a}_n/F) \ \in \ P^{\mathfrak{A}^F} \quad :\Longleftrightarrow$$
$$\left\{ i \in I \mid (\mathbf{a}_1(i), \ldots, \mathbf{a}_n(i)) \in P^{\mathfrak{A}_i} \right\} \ \in \ F.$$

Её называют фильтрованным произведением данного семейства по F и обозначают через $\Pi^F_{i \in I} \mathfrak{A}_i$.

Упражнение

Проверьте корректность определения $f^{\mathfrak{A}^F}$ и $P^{\mathfrak{A}^F}$.

Теорема Лося

Пусть $\langle \mathfrak{A}_i : i \in I \rangle$ — непустое индексированное семейство σ-структур, а U — ультрафильтр на I. Тогда для любых $\Phi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Form}_\sigma$ и $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \Pi_{i \in I} A_i$,

$$\Pi^U_{i \in I} \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi[\vec{\mathbf{a}}/U] \iff \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi[\vec{\mathbf{a}}(i)]\} \in U.$$

Здесь $\vec{\mathbf{a}}$ — сокращение для $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, а $\vec{\mathbf{a}}(i)$ — для соотв. кортежа i-ых координат, т.е. для $(\mathbf{a}_1(i), \ldots, \mathbf{a}_k(i))$.

Доказательство.

Для удобства положим

$$\mathfrak{A} := \Pi_{i \in I} \mathfrak{A}_i \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}^U := \Pi^U_{i \in I} \mathfrak{A}_i.$$

Кроме того, чтобы сделать выкладки менее громоздкими, мы будем нередко писать $[\![\Phi; \vec{\mathbf{a}}]\!]$ вместо $\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \Vdash \Phi[\vec{\mathbf{a}}(i)]\}$. ...

Доказательство (продолжение).

Заметим, что для каждого $t(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Term}_\sigma$,

$$t^{\mathfrak{A}^U}(\vec{\mathbf{a}}/U) \;=\; t^{\mathfrak{A}}(\vec{\mathbf{a}})/U$$

(это доказывается простой индукцией по построению t). Затем идёт несложная индукция по построению Φ.

- Пусть $\Phi = P(t_1, \ldots, t_n)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^U \Vdash \Phi[\vec{\mathbf{a}}/U] \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(t_1^{\mathfrak{A}^U}(\vec{\mathbf{a}}/U), \ldots, t_n^{\mathfrak{A}^U}(\vec{\mathbf{a}}/U)\right) \in P^{\mathfrak{A}^U} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{\mathbf{a}})/U, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}(\vec{\mathbf{a}})/U\right) \in P^{\mathfrak{A}^U} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{i \in I \mid \left(\left(t_1^{\mathfrak{A}}(\vec{\mathbf{a}})\right)(i), \ldots\right) \in P^{\mathfrak{A}_i}\right\} \in U \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{i \in I \mid \left(t_1^{\mathfrak{A}_i}(\vec{\mathbf{a}}(i)), \ldots\right) \in P^{\mathfrak{A}_i}\right\} \in U \\
&\Longleftrightarrow \quad [\![\Phi; \vec{\mathbf{a}}]\!] \in U.
\end{aligned}$$

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi = \neg\Psi$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^U \Vdash \Phi\,[\vec{\mathbf{a}}/U] &\iff \mathfrak{A}^U \nVdash \Psi\,[\vec{\mathbf{a}}/U] \\ &\iff [\![\Psi;\vec{\mathbf{a}}]\!] \notin U \\ &\iff I \setminus [\![\Psi;\vec{\mathbf{a}}]\!] \in U \\ &\iff [\![\Phi;\vec{\mathbf{a}}]\!] \in U. \end{aligned}$$

- Пусть $\Phi = \Psi \vee \Theta$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^U \Vdash \Phi\,[\vec{\mathbf{a}}/U] &\iff \mathfrak{A}^U \Vdash \Psi\,[\vec{\mathbf{a}}/U] \ \text{ или } \ \mathfrak{A}^U \Vdash \Theta\,[\vec{\mathbf{a}}/U] \\ &\iff [\![\Psi;\vec{\mathbf{a}}]\!] \in U \ \text{ или } \ [\![\Theta;\vec{\mathbf{a}}]\!] \in U \\ &\iff [\![\Psi;\vec{\mathbf{a}}]\!] \cup [\![\Theta;\vec{\mathbf{a}}]\!] \in U \\ &\iff [\![\Phi;\vec{\mathbf{a}}]\!] \in U. \end{aligned}$$

. . .

Доказательство (продолжение).

- Пусть $\Phi = \exists y\, \Psi(\vec{x}, y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^U \Vdash \Phi[\vec{\mathbf{a}}/U] &\iff \exists \mathbf{b} : \mathfrak{A}^U \Vdash \Psi[\vec{\mathbf{a}}/U, \mathbf{b}/U] \\ &\iff \exists \mathbf{b} : [\![\Psi; \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]\!] \in U \\ &\iff [\![\Phi; \vec{\mathbf{a}}]\!] \in U. \end{aligned}$$

  Последняя эквивалентность требует пояснения:

  $\boxed{\Rightarrow}$ заметим, что $[\![\Psi; \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]\!] \subseteq [\![\Phi; \vec{\mathbf{a}}]\!]$;

  $\boxed{\Leftarrow}$ заметим, что $[\![\Phi; \vec{\mathbf{a}}]\!] \subseteq [\![\Psi; \vec{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]\!]$ для <u>подходящего</u> $\mathbf{b} \in \Pi_{i\in I} A_i$.

- Случаи, когда Φ имеет вид $\Psi \wedge \Theta$, $\Psi \to \Theta$ или $\forall y\, \Psi(\vec{x}, y)$, легко сводятся к рассмотренным выше случаям.

$\square$

Interlude: Аксиоматизируемость

Для произвольного класса $\mathcal{K}$ σ-структур положим

$$\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}) \;:=\; \{\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \mathfrak{A} \in \mathcal{K}\}.$$

Вместо $\mathrm{Th}\,(\{\mathfrak{A}\})$ часто пишут $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A})$. С другой стороны, для всякого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ определим

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;:=\; \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \Vdash \Phi \text{ для всех } \Phi \in \Gamma\}.$$

Строго говоря, $\mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ — ровно как и $\mathcal{K}$ — представляет собой класс (не обязательно множество). Здесь «принадлежность классу» можно трактовать как конкретное условие на σ-структуры. Так,

$$\mathfrak{A} \;\in\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma) \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \Gamma.$$

Вместо $\mathrm{Mod}\,(\{\Phi\})$ обычно пишут $\mathrm{Mod}\,(\Phi)$.

Замечание

Легко видеть, что Th антимонотонно:

$$\mathcal{K}_1 \ \subseteq \ \mathcal{K}_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_1) \ \supseteq \ \mathrm{Th}\,(\mathcal{K}_2).$$

Аналогично для Mod:

$$\Gamma_1 \ \subseteq \ \Gamma_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Mod}\,(\Gamma_1) \ \supseteq \ \mathrm{Mod}\,(\Gamma_2).$$

Стоит также отметить, что

$$\mathcal{K} \ \subseteq \ \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K})) \quad \text{и} \quad \Gamma \ \subseteq \ \mathrm{Th}\,(\mathrm{Mod}\,(\Gamma)).$$

Говорят, что $\mathcal{K}$ аксиоматизируем, если $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для некоторого $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Среди аксиоматизаций существует «наибольшая»:

Утверждение

Для любого класса $\mathcal{K}$ σ-структур,

$$\mathcal{K} \text{ аксиоматизируем} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{K} \;=\; \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K})).$$

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для нек. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Ясно, что $\Gamma \subseteq \mathrm{Th}\,(\mathcal{K})$, а потому

$$\mathcal{K} \;\subseteq\; \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K})) \;\subseteq\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;=\; \mathcal{K}.$$

В итоге $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\mathrm{Th}\,(\mathcal{K}))$. □

Два приложения теоремы Лося

Если σ-структуры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ таковы, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называют элементарно эквивалентными и при этом пишут $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Один критерий аксиоматизируемости

Класс $\mathcal{K}$ σ-структур аксиоматизируем т.т.т., когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.

Замечание

Фильтрованные произведения индексированных семейств σ-структур по ультрафильтрам обычно называются ультрапроизведениями.

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Это легко.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $\mathcal{K}$ замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений. Очевидно, для любой σ-структуры $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \in \mathcal{K} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \Vdash \mathsf{Th}\,(\mathcal{K}).$$

Докажем, что $\mathfrak{A} \Vdash \mathsf{Th}\,(\mathcal{K})$ влечёт $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. Пусть $\mathfrak{A} \Vdash \mathsf{Th}\,(\mathcal{K})$. Возьмём

$$I \ := \ \mathsf{Th}\,(\mathfrak{A}).$$

Можно проверить, что $\mathcal{K} \cap \mathsf{Mod}\,(\Phi) \neq \varnothing$ для всех $\Phi \in I$; значит, для всякого $\Phi \in I$ можно (с помощью аксиомы выбора) выбрать $\mathfrak{C}_\Phi \in \mathcal{K}$ такую, что $\mathfrak{C}_\Phi \Vdash \Phi$. Далее, для каждого $\Phi \in I$ положим

$$U_\Phi \ := \ \{\Psi \in I \mid \mathfrak{C}_\Psi \Vdash \Phi\}.$$

...

Доказательство (продолжение).

Теперь рассмотрим

$$S \;:=\; \{U_\Phi \mid \Phi \in I\}.$$

Заметим, что S — центрированное множество подмножеств I. Стало быть, найдётся ультрафильтр U на I такой, что $S \subseteq U$. Обозначим

$$\mathfrak{A}^\star \;:=\; \Pi^U_{\Phi \in I}\mathfrak{C}_\Phi.$$

Очевидно, для любого $\Phi \in I$ верно $U_\Phi \in U$, а потому $\mathfrak{A}^\star \Vdash \Phi$, в силу теоремы Лося. Значит, $\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{Th}\,(\mathfrak{A}^\star)$. Следовательно,

$$\mathrm{Th}\,(\mathfrak{A}) \;=\; \mathrm{Th}\,(\mathfrak{A}^\star),$$

т.е. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}^\star$. Поскольку $\mathfrak{A}^\star \in \mathcal{K}$, это влечёт $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$. $\square$

Локальная теорема Гёделя–Мальцева, a.k.a. теорема о компактности

Множество Γ σ-предложений выполнимо тогда и только тогда, когда оно локально выполнимо.

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Тривиально.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть Γ локально выполнимо, т.е.

$$\mathrm{Mod}\,(\Delta) \;\neq\; \varnothing \quad \text{для любого конечного } \Delta \subseteq \Gamma.$$

Если Γ конечно, то оно выполнимо. Будем считать, что Γ бесконечно. Возьмём

$$I \;:=\; \{\Delta \mid \Delta \subseteq \Gamma \text{ и } \Delta \text{ конечно}\}.$$

...

Доказательство (продолжение).

Для всякого $\Delta \in I$ можно (с помощью аксиомы выбора) выбрать $\mathfrak{C}_\Delta$ такую, что $\mathfrak{C}_\Delta \Vdash \Delta$. Кроме того, для каждого $\Delta \in I$ положим

$$U_\Delta \ := \ \{\Lambda \in I \mid \Delta \subseteq \Lambda\}.$$

Теперь рассмотрим

$$S \ := \ \{U_\Delta \mid \Delta \in I\}.$$

Заметим, что S — центрированное множество подмножеств I. Стало быть, найдётся ультрафильтр U на I такой, что $S \subseteq U$. Обозначим

$$\mathfrak{A}^\star \ := \ \Pi^U_{\Delta \in I} \mathfrak{C}_\Delta.$$

Заметим, что для любого $\Phi \in \Gamma$ мы имеем

$$\{\Lambda \in I \mid \mathfrak{C}_\Lambda \Vdash \Phi\} \ \supseteq \ U_{\{\Phi\}} \ \in \ U,$$

а потому $\mathfrak{A}^\star \Vdash \Phi$, в силу теоремы Лося. Значит, $\mathfrak{A}^\star \Vdash \Gamma$. $\square$

Appendix: О конечной аксиоматизируемости

Говорят, что $\mathcal{K}$ конечно аксиоматизируем, если $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ для некоторого кон. $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$, что, разумеется, равносильно $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Phi)$ для некоторого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$.

Утверждение

Для любого класса $\mathcal{K}$ σ-структур,

$$\mathcal{K} \text{ конечно аксиоматизируем} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{K} \text{ и } \overline{\mathcal{K}} \text{ аксиоматизируемы},$$

где $\overline{\mathcal{K}}$ обозначает класс всех σ-структур, не лежащих в $\mathcal{K}$.

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Phi)$ для некоторого $\Phi \in \mathrm{Sent}_\sigma$. Ясно, что тогда $\overline{\mathcal{K}}$ совпадает с $\mathrm{Mod}\,(\neg\Phi)$.
...

Доказательство (продолжение).

$\Longleftarrow$ Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$ и $\overline{\mathcal{K}} = \mathrm{Mod}\,(\Gamma')$ для некоторых $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$ и $\Gamma' \subseteq \mathrm{Sent}_\sigma$. Ясно, что

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma \cup \Gamma') \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma) \cap \mathrm{Mod}\,(\Gamma') \;=\; \varnothing.$$

Значит, найдутся кон. $\Delta \subseteq \Gamma$ и $\Delta' \subseteq \Gamma'$ такие, что $\mathrm{Mod}\,(\Delta \cup \Delta') = \varnothing$, т.е. $\mathrm{Mod}\,(\Delta) \cap \mathrm{Mod}\,(\Delta') = \varnothing$. Тогда

$$\mathrm{Mod}\,(\Gamma) \;\subseteq\; \mathrm{Mod}\,(\Delta) \;\subseteq\; \overline{\mathrm{Mod}\,(\Delta')} \;\subseteq\; \overline{\mathrm{Mod}\,(\Gamma')} \;=\; \mathrm{Mod}\,(\Gamma).$$

Стало быть, $\mathrm{Mod}\,(\Delta) = \mathrm{Mod}\,(\Gamma)$. □