

Отклонение последовательностей Коробова–Главки
А.А. Illarionov (Институт прикладной математики ДВО РАН, Хабаровское
отделение)

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$. Коробов (1959) и Главка (1962) независимо предложили использовать точки вида $x^{(k)} = (\{a_1 k/N\}, \dots, \{a_s k/N\})$ ($k = 1, \dots, N$) в качестве узлов многомерных квадратурных формул. Эта идея оказалась плодотворной и породила целое направление на стыке теории чисел и вычислительной математики

Пусть $D_N(a)$ — отклонение последовательности $\{x^{(k)}\}_{k=1}^N$ от равномерного распределения. С теоретической и практической точки зрения разумно конструировать последовательности с как можно меньшим отклонением. Если $s = 1$, $\gcd(a_1, N) = 1$, то $D_N(a_1) = 1/N$. Пусть $s \geq 2$. Наилучшая (на сегодня) верхняя оценка имеет вид

$$\mathfrak{D}_N^{(s)} \equiv \min_{a \in \mathbb{Z}_N^s} D_N(a) \ll_s \frac{\ln^{s-1} N}{N} \ln \ln N \quad (\text{Быковский, 2012}).$$

Есть основание полагать, что

$$\mathfrak{D}_N^{(s)} \gg_s \frac{\ln^{s-1} N}{N}.$$

При $s = 2$ это неравенство вытекает из теоремы Шмидта. При $s \geq 3$ наилучшая (на сегодня) нижняя оценка имеет вид

$$\mathfrak{D}_N^{(s)} \gg_s \frac{(\ln N)^{(s-1)/2+\eta(s)}}{N} \quad (\text{Bilyk, Lacey, Vagharshakyan; 2008}),$$

где $\eta(s)$ — положительная постоянная, зависящая только от s .

В настоящей работе получены некоторые результаты, связанные с распределением последовательности $\{x^{(k)}\}_{k=1}^N$. В частности, доказано, что

$$\frac{\ln^{s-1} N}{N \ln \ln N} \ll_s D_N(a) \ll_s \frac{\ln^{s-1} N}{N} \ln \ln N$$

для “почти всех” $a \in (\mathbb{Z}_N^*)^s$, где $\mathbb{Z}_N^*$ — приведенная система вычетов по модулю N .