Случайные блуждания, сопровождающие рекуррентные случайные последовательности

А.В. Шкляев [1]

21 марта 2022 г.

[1]Место работы: МГУ имени М.В. Ломоносова, alexander.shklyaev@math.msu.ru

УДК 519.214.8

Аннотация

В работе рассматриваются вероятности больших уклонений строго докритического ветвящегося процесса $\{Z_n^*, n \geq 0\}$ с иммиграцией в случайной среде, порожденных последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Предполагается, что приращения сопровождающего случайного блуждания $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ имеют конечное среднее μ и удовлетворяют условию Крамера $\mathbf{E}e^{h\xi_i} < \infty$, $0 < h < h^+$. При дополнительных моментных ограничениях на Z_1 найдена точная асимптотика вероятностей $\mathbf{P}(\ln Z_n \in [x, x + \Delta_n))$ при изменении отношения x/n в диапазоне $(0, \widetilde{\gamma})$, где $\widetilde{\gamma}$ – некоторая положительная константа, и всех достаточно медленно стремящихся к нулю при $n \to \infty$ последовательностей Δ_n. Этот результат дополняет полученное ранее автором утверждение об асимптотике таких вероятностей для случая $x/n > \widetilde{\gamma}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 19-11-00111) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Случайные блуждания, сопровождающие рекуррентные случайные последовательности А.В. Шкляев, МГУ имени М.В. Ломоносова, ashklyaev@math.msu.ru В теории ветвящихся процессов в случайной среде (ВПСС) хорошо известно понятие сопровождающего блуждания – для процесса Z_n можно указать такое случайное блуждание S_n, что предельное поведение процессов тесно связано. В особенности это проявляется в случае надкритических процессов, когда шаги блуждания имеют положительное среднее. Как показали исследования больших уклонений ВПСС, его большие уклонения в крамеровском случае также описываются поведением сопровождающего блуждания.

Можно заметить, что аналогичное сопровождающее блуждание можно сопоставить в более общей постановке рекуррентной последовательности

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n,\ n \geq 0,$$

где A_i н.о.р. положительные величины, причем $(A_n, A_{n+1}, \dots)$ не зависит от $(Y_0, A_0, \dots, A_{n-1}, B_0, \dots, B_{n-1})$, где величины $\xi_i = \ln A_{i-1}$, $i \geq 1$, предполагаются нерешетчатыми, $\mathbf{E}\xi = \mu$. При условиях $R(h) = \mathbf{E}A_1^h < +\infty$, $\mathbf{E}B_n^h < R(h)^n/n^h$, $h \in [0, h^+)$ удается показать, что

$$\mathbf{P}(\ln^+ Y_n \in [x, x+\Delta)) \sim I(\theta)\mathbf{P}(S_n \in [x, x+\Delta))$$

при всех $\Delta > 0$ равномерно по $x/n \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\max(\mu, 0), m^+)$ для некоторого m^+. Здесь $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ мы и будем называть сопровождающим случайным блужданием.

Помимо указанной связи асимптотики вероятностей больших уклонений удается показать близость траекторий соответствующих случайных процессов при условии совершения траекторией большого уклонения. В качестве последовательностей, к которым можно применить такого рода подход, можно назвать:

- ветвящиеся процессы в случайной среде (в том числе, включающие иммиграцию и определенную зависимость от числа частиц);
- двуполые ветвящиеся процессы в случайной среде;
- максимальные ветвящиеся процессы с ф.р. числа потомков одной частицы вида $F(x) = 1 - c/x + O(x^{-1-\delta})$, $x \to \infty$ при некотором $\delta > 0$;
- максимальные ветвящиеся процессы в случайной среде с ф.р. числа потомков одной частицы при условии среды вида $F_{X|\eta}(x|y) = 1 - c_y/x + r(x,y)/x^{1+\delta}$, $x \to \infty$ при некотором $\delta > 0$ не зависящем от y (и некоторых дополнительных условиях на $r(x,y)$).

В каждом из случаев возникает свое сопровождающее блуждание, определяющее как асимптотику вероятностей больших (умеренных, нормальных) уклонений логарифма нашего процесса, так и поведение траекторий процесса при условии совершения им большого уклонения.