

Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 9.

Теретёнков Александр Евгеньевич

28 марта 2022 г.

Частичный след и "одночастичное" вторичное квантование

Утверждение. Пусть $\hat{\rho} = \sum_{l,k=0}^n \rho_{lk} |\hat{l}\rangle \langle \hat{k}|$, тогда след по пространствам, пронумерованным индексами I , может быть вычислен по формуле:

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_i, i \in I} \hat{\rho} = \hat{\rho}_{\bar{I}} + \sum_{l \in I} \rho_{ll} |\hat{0}\rangle \langle \hat{0}|, \quad \hat{\rho}_{\bar{I}} = \sum_{l,k \in \bar{I}} \rho_{lk} |\hat{l}\rangle \langle \hat{k}|,$$

где $\bar{I} = \{0, \dots, n\} \setminus I$.

Немарковский резонансный распад

Резонансный случай $\omega_1 = \Omega$.

Решение в случае начального условия $\psi_1(0) = 1, \psi_{\bar{1}}(0) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= e^{-(\frac{\gamma}{4} + i\Omega)t} \left(\text{ch } \Delta t + \frac{\gamma}{4\Delta} \text{sh } \Delta t \right), \\ \psi_{\bar{1}}(t) &= -\frac{ig}{\Delta} e^{-(\frac{\gamma}{4} + i\Omega)t} \text{sh } \Delta t,\end{aligned}$$

где $\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2 - 16g^2}$. Решение после взятия следа (точное!):

$$\begin{aligned}\rho_S(t) &= e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(\text{ch } \Delta t + \frac{\gamma}{4\Delta} \text{sh } \Delta t \right)^2 |1\rangle\langle 1| + \\ &+ \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(\text{ch } \Delta t + \frac{\gamma}{4\Delta} \text{sh } \Delta t \right)^2 \right) |0\rangle\langle 0|.\end{aligned}$$

Предел Боголюбова-ван Хова

Упражнение. Вычислить в пределе Боголюбова-ван Хова

$$\rho_M(t) \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho_S \left(\frac{1}{\lambda^2} t, \lambda g \right) = ?$$

Проверить, что

$$\frac{d}{dt} \rho_M(t) = \gamma_0 \left(|0\rangle\langle 1| \rho_M(t) |1\rangle\langle 0| - \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1| \rho(t) - \frac{1}{2} \rho_M(t) |1\rangle\langle 1| \right).$$

Явно вычислить γ_0 .

Предел сильной связи

В режиме сильной связи получим осциллирующую динамику

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \rho_S \left(\frac{1}{\lambda} t, \lambda g \right) = \cos^2(gt) |1\rangle \langle 1| + \sin^2(gt) |0\rangle \langle 0|.$$

Таким образом, переход из марковского режима в сильно немарковский соответствует переходу из режима релаксации в режим осцилляций.

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

В случае произвольной матрицы плотности системы (в представлении взаимодействия)

$$\rho_S(t) = \begin{pmatrix} |x(t)|^2 \rho_{11}(0) & x(t) \rho_{10}(0) \\ x^*(t) \rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) + (1 - |x(t)|^2) \rho_{11}(0) \end{pmatrix},$$

где $x(t)$ — решение

$$\frac{d}{dt}x(t) = - \int_0^t d\tau G(t - \tau)x(\tau), \quad x(0) = 1$$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

Упражнение. В случае $x(t) \neq 0$ редуцированная матрица плотности $\rho_S(t)$ удовлетворяет

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_t(\rho_S(t))$$

с зависящем от времени ГКСЛ-генератором

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\Delta\Omega(t)\sigma_+\sigma_-, \rho] + \Gamma(t) \left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_- \right),$$

где

$$\Delta\Omega(t) = -\operatorname{Im} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}, \quad \Gamma(t) = -2 \operatorname{Re} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}.$$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

$$\frac{d}{dt}x_\lambda(t) = -\lambda^2 \int_0^t d\tau G(t - \tau)x_\lambda(\tau).$$

После перерастяжки Боголюбова-ван Хова $x(t; \lambda) = x_\lambda(\lambda^{-2}t)$,
имеем

$$\lambda^2 \frac{d}{dt}x(t; \lambda) = -\lambda^2 \int_0^{t/\lambda^2} G\left(\frac{t}{\lambda^2} - \tau\right) x(\lambda^2\tau; \lambda) d\tau.$$

После замены переменных $s = \lambda^2\tau$:

$$\frac{d}{dt}x(t; \lambda) = - \int_0^t \frac{1}{\lambda^2} G\left(\frac{t-s}{\lambda^2}\right) x(s; \lambda) ds,$$

где $x(0; \lambda) = 1$.

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

Сделаем преобразование Лапласа

$$p\tilde{x}(p; \lambda) - 1 = -\tilde{G}(\lambda^2 p)\tilde{x}(p; \lambda),$$

где $\tilde{G}(p) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-pt} G(t) dt$ и $\tilde{x}(p; \lambda) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-pt} x(t; \lambda) dt$. Тогда

$$\tilde{x}(p; \lambda) = \frac{1}{p + \tilde{G}(\lambda^2 p)}.$$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

$$\tilde{G}(\lambda^2 p) = \sum_{k=0}^n \tilde{G}_k \lambda^{2k} p^k + O(\lambda^{2n+2}),$$

где

$$\tilde{G}_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty t^k G(t) dt.$$

$$\frac{1}{p + \tilde{G}(\lambda^2 p)} = \frac{1}{p + \sum_{k=0}^n \tilde{G}_k \lambda^{2k} p^k} + O(\lambda^{2n+2}),$$

В случае $\tilde{G}(p)$ общего положения будем считать $\tilde{G}_n \neq 0$, тогда

$$p + \sum_{k=0}^n \tilde{G}_k \lambda^{2k} p^k = (p - \tilde{p}) \lambda^{2n} \tilde{G}_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(p - \frac{p_k}{\lambda^2} \right),$$

где $\tilde{p} = O(1)$ для $\tilde{G}_0 \neq 0$ (для $\tilde{G}_0 = 0$ $\tilde{p} = o(1)$), $p_k = O(1)$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

В случае общего положения будем считать, что нет совпадающих $\tilde{p}_k$

$$\tilde{x}(p; \lambda) = \frac{r(\lambda)}{p - \tilde{p}(\lambda)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{r_k(\lambda)}{p - \frac{p_k(\lambda)}{\lambda^2}} + O(\lambda^{2n+2}).$$

После обратного преобразования Лапласа:

$$x(t; \lambda) = r(\lambda)e^{\tilde{p}(\lambda)t} + \sum_{k=1}^{n-1} r_k(\lambda)e^{p_k(\lambda)\frac{t}{\lambda^2}} + O(\lambda^{2n+2}).$$

$$x(t; \lambda)|_{\text{pert}} = r(\lambda)e^{\tilde{p}(\lambda)t}$$