Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 10.

Теретёнков Александр Евгеньевич

4 апреля 2022 г.

На прошлой лекции...

В случае произвольной матрицы плотности системы (в представлении взаимодействия)

$$\rho_S(t) = \begin{pmatrix} |x(t)|^2 \rho_{11}(0) & x(t)\rho_{10}(0) \\ x^*(t)\rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) + (1 - |x(t)|^2)\rho_{11}(0) \end{pmatrix},$$

где $x(t)$ — решение

$$\frac{d}{dt} x(t;\lambda) = -\int_0^t \frac{1}{\lambda^2} G\left(\frac{t-s}{\lambda^2}\right) x(s;\lambda) ds,$$

где $x(0;\lambda) = 1$.

На прошлой лекции...

$$x(t;\lambda)|_{\text{pert}} = r(\lambda)e^{\tilde{p}(\lambda)t}$$

На прошлой лекции...

$$x(t;\lambda)|_{\text{pert}} = r(\lambda)e^{\tilde{p}(\lambda)t}$$

В случае $x(t) \neq 0$ редуцированная матрица плотности $\rho_S(t)$ удовлетворяет

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_t(\rho_S(t))$$

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\Delta\Omega(t)\sigma_+\sigma_-, \rho] + \Gamma(t)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right),$$

где

$$\Delta\Omega(t) = -\operatorname{Im}\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}, \qquad \Gamma(t) = -2\operatorname{Re}\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}.$$

На прошлой лекции...

$$x(t;\lambda)|_{\mathrm{pert}} = r(\lambda)e^{\tilde{p}(\lambda)t}$$

В случае $x(t) \neq 0$ редуцированная матрица плотности $\rho_S(t)$ удовлетворяет

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}_t(\rho_S(t))$$

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\Delta\Omega(t)\sigma_+\sigma_-, \rho] + \Gamma(t)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho - \frac{1}{2}\rho\sigma_+\sigma_-\right),$$

где

$$\Delta\Omega(t) = -\operatorname{Im}\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}, \qquad \Gamma(t) = -2\operatorname{Re}\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}.$$

$$\Delta\Omega(t)|_{\mathrm{pert}} = -\operatorname{Im}\tilde{p}(\lambda), \qquad \Gamma(t)|_{\mathrm{pert}} = -2\operatorname{Re}\tilde{p}(\lambda)$$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

$$\tilde{x}(p;\lambda)|_{\mathrm{pert}} = \frac{r(\lambda)}{p - \tilde{p}(\lambda)}.$$

$\tilde{p}(\lambda)$ — решение уравнения

$$\tilde{p}(\lambda) + \tilde{G}(\lambda^2 \tilde{p}(\lambda)) = 0$$

в виде ряда $\tilde{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n \lambda^{2n}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_0 &= -\tilde{G}_0, \\
\tilde{p}_1 &= \tilde{G}_0 \tilde{G}_1, \\
\tilde{p}_2 &= -\tilde{G}_0(\tilde{G}_1^2 + \tilde{G}_0 \tilde{G}_2), \\
\tilde{p}_3 &= \tilde{G}_0(\tilde{G}_1^3 + 3\tilde{G}_0 \tilde{G}_1 \tilde{G}_2 + \tilde{G}_0^2 \tilde{G}_3).
\end{aligned}$$

$$\tilde{G}_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k G(t) dt.$$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

$r(\lambda)$ может быть найдено как

$$r(\lambda) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon r(\lambda)}{p - \tilde{p}(\lambda)}\bigg|_{p = \tilde{p}(\lambda) + \varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{p + \tilde{G}(\lambda^2 p)}\bigg|_{p = \tilde{p}(\lambda) + \varepsilon} = \frac{1}{1 + \lambda^2 \frac{d}{dp}\tilde{G}|_{p = \lambda^2 \tilde{p}}}.$$

$$\frac{d\tilde{p}}{d\lambda^2} + \left(\frac{d}{dp}\tilde{G}|_{p = \lambda^2 \tilde{p}}\right)\left(\tilde{p} + \lambda^2 \frac{d\tilde{p}}{d\lambda^2}\right) = 0.$$

$$r(\lambda) = 1 + \lambda^2 \frac{1}{\tilde{p}} \frac{d\tilde{p}}{d\lambda^2}.$$

Поправки к пределу Боголюбова-ван Хова

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 1\\
r_1 &= -\tilde{G}_1,\\
r_2 &= \tilde{G}_1^2 + 2\tilde{G}_0\tilde{G}_2,\\
r_3 &= -(\tilde{G}_1^3 + 6\tilde{G}_0\tilde{G}_1\tilde{G}_2 + 3\tilde{G}_0^2\tilde{G}_3).
\end{aligned}
$$

Явление начального слоя

$$\rho(+0)|_{\mathrm{pert}} = \begin{pmatrix} |r(\lambda)|^2 \rho_{11}(0) & r(\lambda)\rho_{10}(0) \\ r^*(\lambda)\rho_{01}(0) & \rho_{00}(0) + (1 - |r(\lambda)|^2)\rho_{11}(0) \end{pmatrix}.$$

Явление начального слоя

Пусть $\rho(0)$ — матрица плотности. Тогда $\rho(+0)|_{\mathrm{pert}}$ вообще говоря не обязан быть матрицей плотности. А именно она не будет таковой при $|r(\lambda)| > 1$. Но она станет матрицей плотности за время порядка

$$t^* = -\frac{\ln |r(\lambda)|}{\operatorname{Re} \tilde{p}(\lambda)}.$$

При $\operatorname{Re} \tilde{G}_0 \neq 0$ в первом главном порядке теории возмущений возникает при $\operatorname{Re}\ \tilde{G}_1 < 0$

$$t^* \simeq -\lambda^2 \frac{\operatorname{Re} \tilde{G}_1}{\operatorname{Re} \tilde{G}_0}$$

Явление начального слоя

$$G(t) = \sum_{l=1}^{n} g_l^2 e^{-(\gamma_l + i\Delta\omega_l)t}, \qquad t \geq 0,$$

где $\Delta\omega_l \equiv \omega_l - \Omega$.

$$t^* \simeq \lambda^2 \sum_{l=1}^{n} \frac{J_l(\Omega)}{J(\Omega)} \frac{1}{\gamma_l} \frac{\gamma_l^2 - \Delta\omega_l^2}{\gamma_l^2 + \Delta\omega_l^2},$$

где $J_l(\omega) = \frac{2\gamma_l g_l^2}{\gamma_l^2 + (\omega - \omega_l)^2}$, $J(\omega) = \sum_{l=1}^{n} J_l(\omega)$.
Таким образом, нефизический начальный слой возникает при достаточно малой расстройке $|\Delta\omega_l|$. γ_l^{-1} характеризует время корреляции резервуара, поэтому t^* порядка этого времени корреляции.

Корреляционные функции

Регрессионная формула

$$\langle \sigma_-(t_2)\sigma_+(t_1)\rangle_{\mathrm{M}} = \mathrm{Tr}(\sigma_- \Phi_{t_1}^{t_2}(\sigma_+ \Phi_0^{t_1}(|0\rangle\langle 0|))) = \frac{x(t_2)}{x(t_1)},$$

где $\Phi_{t_1}^{t_2}$ определяется $\rho(t_2) = \Phi_{t_1}^{t_2}\rho(t_1), t_2 \geq t_1$.
Точное вычисление

$$\langle \sigma_-(t_2)\sigma_+(t_1)\rangle = x(t_2 - t_1).$$

Таким образом, если учитывать только пертурбативные слагаемые

$$\langle \sigma_-(t_2)\sigma_+(t_1)\rangle_{\mathrm{M}}|_{\mathrm{pert}} = r\langle \sigma_-(t_2)\sigma_+(t_1)\rangle|_{\mathrm{pert}}$$

Расходящийся момент

$$J(\omega+\Omega) = \chi g^2 \frac{2\gamma}{\gamma^2+\omega^2} + (1-\chi) g^2 |\omega|^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2\gamma}}{\gamma^2+\omega^2}, \gamma > 0, g > 0, \chi \in (0,1).$$

В такой ситуации $\tilde{G}_0 = \chi \frac{g^2}{\gamma}$, а следующий момент $\tilde{G}_1$ расходится. Тогда

$$x(t;\lambda^2) = x_0(t) + \lambda x_{\frac{1}{2}}(t) + O(\lambda^2),$$

где

$$x_0(t) = e^{-\chi \frac{g^2}{\gamma} t}, \qquad x_{\frac{1}{2}}(t) = O(t^{-\frac{1}{2}}), t \to +\infty$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t$$

Базовый пример:
Гамильтониан

$$H = H_0 + \lambda H_I$$

Уравнение Лиувилля-фон Неймана в представлении взаимодействия

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t, \qquad \mathcal{L}_t = -i[H_I(t), \cdot], \qquad H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t}$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Введём супероператор, который является идемпотентном

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

Кроме того, введём оператор $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Введём супероператор, который является идемпотентном

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

Кроме того, введём оператор $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$$

Базовый пример (Argyres, Kelley, 1964)

$$\mathcal{P}\rho = \mathrm{Tr}_B\, \rho \otimes \rho_B$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Утверждение. Уравнение Накажимы-Цванцига (Nakajima, 1958; Zwanzig, 1960):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t}\mathcal{K}_s^t\rho_s ds$$

$$\mathcal{K}_s^t = \lambda^2\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}, \qquad \mathcal{I}_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q},$$

$$\mathcal{G}_s^t = \overleftarrow{\mathrm{T}}\exp\left(\lambda\int_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_\tau d\tau\right), \quad \mathcal{G}_s^s = I$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Доказательство. Распишем уравнение Лиувилля-фон Неймана в проекциях

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\rho_t \\ \frac{d}{dt}\mathcal{Q}\rho_t = \lambda\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \lambda\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\rho_t \end{cases}$$

Интегрируя второе уравнение, имеем

$$\mathcal{Q}\rho_t = \mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q}\rho_{t_0} + \lambda\int_{t_0}^t \mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}\rho_s ds,$$

$$\mathcal{G}_s^t = \overleftarrow{\mathrm{Texp}}\left(\lambda\int_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_\tau d\tau\right), \quad \mathcal{G}_s^s = I$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Подставляя в первое уравнение, получаем уравнение Накажимы-Цванцига

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q}\rho_{t_0} + \lambda^2\int_{t_0}^t \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}\rho_s ds$$

□

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Как правило, рассматирвают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Как правило, рассматирвают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

В частности для $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = -i(\mathrm{Tr}_B[H_I(t),\rho_S \otimes \rho_B]) \otimes \rho_B = -i[\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B), \rho_S] \otimes \rho_B$$

Таким образом, $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = 0$, если $\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B) = 0$.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Как правило, рассматирвают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

В частности для $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = -i(\mathrm{Tr}_B[H_I(t), \rho_S \otimes \rho_B]) \otimes \rho_B = -i[\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B), \rho_S] \otimes \rho_B$$

Таким образом, $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = 0$, если $\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B) = 0$.
Это выполнено в случае, когда рассматривается гауссовский бозонный резервуар с нулевым средним, а $H_I(t)$ — линеен по операторам рождения и уничтожения. Более того, в этом случае обнуление моментов нечётного порядка даёт

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1} \cdots \mathcal{L}_{t_{2k}}\mathcal{P} = 0,$$

что также часто предполагается.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Член $\mathcal{I}_t\rho_{t_0}$ характеризует насколько начальное состояние согласовано с проекцией. Если $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$, то $\mathcal{I}_t\rho_{t_0} = 0$. В случае проектора $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$, $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$ соответствует факторизованным начальным состояниям вида $\rho_{t_0} = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B$.