Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 12.

Теретёнков Александр Евгеньевич

18 апреля 2022 г.

В прошлый раз...

Утверждение. (Chaturvedi, Shibata, 1979)

$$\mathcal{K}_t = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}_t^{(n)},$$

$$\mathcal{K}_t^{(1)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}$$

$$\mathcal{K}_t^{(2)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$$

$$\mathcal{K}_t^{(3)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_t^{(4)} = &\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\ &- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \\ &+ \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\ &- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\mathcal{K}_t^{(2)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\Sigma_t^{(1)}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t \int_{t_0}^{t} ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$$

$$(\Sigma_t^{(1)})^2 = \int_{t_0}^{t} ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} \int_{t_0}^{t} ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = 0$$

$$\mathcal{K}_t^{(3)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t(\Sigma_t^{(2)} + (\Sigma_t^{(1)})^2)\mathcal{P} =$$

$$= \mathcal{P}\mathcal{L}_t\Sigma_t^{(2)}\mathcal{P} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t(\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1})\mathcal{P} =$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$(\Sigma_t^{(1)})^3 = 0$$

$$\Sigma_t^{(1)}\Sigma_t^{(2)} = \int_{t_0}^{t} ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}) = 0$$

$$\Sigma_t^{(2)}\Sigma_t^{(1)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}) \int_{t_0}^{t} ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} =$$

$$= -\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t} ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_2}^{t_1} ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_1}^{t} ds = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \int_{t_0}^{s} dt_2 + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} ds \int_{t_0}^{t_1} dt_2 =$$
$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds + \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \int_{t_0}^{s} dt_2 + \int_{t_0}^{t} ds \int_{t_0}^{s} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\Sigma_t^{(2)}\Sigma_t^{(1)} =$$

$$= -\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} +$$

$$+\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})$$

$$\mathcal{K}_t^{(4)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t(\Sigma_t^{(3)} + \Sigma_t^{(2)}\Sigma_t^{(1)} + \Sigma_t^{(1)}\Sigma_t^{(2)} + (\Sigma_t^{(1)})^3)\mathcal{P} =$$

$$= \mathcal{P}\mathcal{L}_t \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2} -$$

$$-\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1} + \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1} -$$

$$-\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})\mathcal{P} \quad \square$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Обнуляя нечётные моменты:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_t^{(1)} &= \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0 \\
\mathcal{K}_t^{(2)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} = \\
&= \int_{t_0}^{t} dt_1 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} \\
\mathcal{K}_t^{(3)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}) = \\
&= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} = 0
\end{aligned}
$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\mathcal{K}_t^{(4)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} -$$

$$- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} -$$

$$- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P})$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Заметим, что между проекторами $\mathcal{P}$ произведения упорядочены по времени. Оказывается, что в общем случае верна формула

$$\mathcal{K}_t^{(n)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \ldots \mathcal{L}_{t_{n-1}}),$$

где $\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \ldots \mathcal{L}_{t_{n-1}})$ — *частично упорядоченные кумулянты (Кубо - ван Кампена)*.

Локальное по времени кинетическое уравнение

1. Пишем строчку $\mathcal{P}\mathcal{L}\ldots\mathcal{L}\mathcal{P}$.
2. На её основе пишем все возможные строчки, вставляя операторы $\mathcal{P}$ так, чтобы получившая строчка содержала хотя бы один символ $\mathcal{L}$ между двумя операторами $\mathcal{P}$ и ставим знак $(-1)^{\#\mathcal{P}}$, где $\#\mathcal{P}$ — количество вставленных операторов $\mathcal{P}$.
3. Добавляем к первому символу $\mathcal{L}$ индекс t, а к остальным индексы t так, чтобы между любой парой супероператоров $\mathcal{P}$ индексы t_k были упорядочены по возростанию индекса k. Если таких способов несколько, то выписываем все возможные способы, сохраняя знак, получившийся на предыдущем шаге.
4. Складываем получившиеся члены с учётом знаков.

Локальное по времени кинетическое уравнение

$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1})$ - ?

1. $\mathcal{PLLP}$.
2. $\mathcal{PLLP}$, $-\mathcal{PLPLP}$.
3. $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$, $-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$
4. $\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3})$ - ?

1. $\mathcal{PLLLLP}$.
2. $\mathcal{PLLLLP}$, $-\mathcal{PLPLLLP}$, $-\mathcal{PLLPLLP}$, $-\mathcal{PLLLPLP}$,$\mathcal{PLLPLPLP}$,$\mathcal{PLPLLPLP}$,$\mathcal{PLPLPLLP}$, $-\mathcal{PLPLPLPLP}$.
3. $-\mathcal{PLLPLLP} \to$ $-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}, -\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}, -\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}$
4.

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$
\begin{gathered}
\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}) = \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \\
-\underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}
\end{gathered}
$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{K}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}'_t\mathcal{Q}\rho_{t_0}$$

Неоднородность

$$\mathcal{I}'_t = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\mathcal{I}_t^{(n)}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{K}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}'_t\mathcal{Q}\rho_{t_0}$$

Неоднородность

$$\mathcal{I}'_t = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\mathcal{I}_t^{(n)}$$

Первые члены такого разложения могут быть получены аналогичным способом (Chang, Skinner, 1993)

$$\mathcal{I}_t^{(1)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}$$

$$\mathcal{I}_t^{(2)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}$$

$$\mathcal{I}_t^{(3)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q})$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\mathcal{I}_t^{(4)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} -$$
$$- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} +$$
$$+ \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} -$$
$$- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q})$$

Пример

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$$

$$\hat{H}_{\text{SB}}^{\text{RWA}} = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega\sigma_+\sigma_- \otimes I + \int \left(g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k \sigma_+ \otimes b_k\right) dk.$$

$$\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t) = \int \left(e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} \sigma_+ \otimes b_k\right) dk$$

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t), \rho]$$

$$\mathcal{P}\rho = \operatorname{Tr}_B \rho \otimes |vac\rangle\langle vac|$$

Пример

Утверждение.

$$\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \sigma_+ \otimes \rho_B = -G_I(t-t_1)\sigma_+ \otimes \rho_B,$$

где

$$\rho_B = |vac\rangle\langle vac|$$

$$G_I(t) = \int |g_k|^2 dk e^{-i(\omega_k - \Omega)t}$$

Кроме того,

$$\mathcal{P}\sigma_+ \otimes \rho_B = \sigma_+ \otimes \rho_B$$

Пример

$$\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -i[\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] =$$

$$= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk$$

Пример

$$\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -i[\hat{H}^{\mathrm{RWA}}_{\mathrm{SB,I}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] =$$

$$= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk$$

$$\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) =$$

$$= -\left[\hat{H}^{\mathrm{RWA}}_{\mathrm{SB,I}}(t), \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk\right] =$$

$$= -\int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \sigma_- \sigma_+ \otimes b_{k'} b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk dk' =$$

$$= -\int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \otimes \delta(k - k') |vac\rangle\langle vac| dk dk' =$$

$$= -\int dk e^{-i(\omega_k - \Omega)(t - t_1)} |g_k|^2 \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| =$$

$$= -G_I(t - t_1)\sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| \quad \square$$

Пример

$$(\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} -$$
$$- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P})\sigma_+ \otimes \rho_B =$$
$$= -(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3} + \mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2})\sigma_+ \otimes \rho_B =$$
$$= -(G_I(t - t_2)G_I(t_1 - t_3) + G_I(t - t_3)G_I(t_1 - t_2))\sigma_+ \otimes \rho_B$$