УДК 517.53

С. П. Суетин

Некоторый аналог вариационных формул Адамара и Шиффера

В работе получена некоторая достаточно общая вариационная формула для функции Грина, из которой вытекают, в частности, классические вариационные формулы Адамара [3] и Шиффера [15].

Библиография: 20 названий.

Основная цель настоящей работы – вывод некоторой достаточно общей вариационной формулы (см. (15)) для функции Грина, из которой вытекают, в частности, классические вариационные формулы Адамара [3] и Шиффера [15].

§ 1. Формула Адамара

Пусть G – ограниченная конечносвязная область, граница γ которой состоит из конечного числа (замкнутых) аналитических кривых, $n_z = e^{i\alpha_z}$ – единичная внутренняя нормаль к кривой γ в точке $z \in \gamma$. Пусть $\psi(s)$ – положительная аналитическая функция натурального параметра на γ (при $z \in \gamma$ будем иногда писать $\psi(z)$). Тогда для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ можно определить положительный сдвиг $\varepsilon\psi(z)n_z = \varepsilon\psi(z)e^{i\alpha_z}$ внутрь области G по направлению внутренней нормали n_z на величину $\delta n_z := \varepsilon\psi(z) > 0$. Кривая γ переходит в кривую $\gamma^* := \{z^* = z + \delta n_z \cdot n_z,\ z \in \gamma\}$, ограничивающую новую область G^*, $\partial G^* = \gamma^*$, $G^* \Subset G$.

Обозначим через $g(z,\zeta)$ функцию Грина исходной области G с особенностью в точке $\zeta \in K \Subset G$ и пусть $g^*(z,\zeta)$ – соответствующая функция Грина для области G^*. Имеет место следующая вариационная формула Адамара (см. [3], [4], [15], [19]):

$$g^*(z,\zeta) - g(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\partial g(w,\zeta)}{\partial n_w}\frac{\partial g(w,z)}{\partial n_w}\delta n_w\, ds_w + O(\varepsilon^2), \qquad (1)$$

где $z \in G^*$, оценка $O(\varepsilon^2)$ справедлива равномерно по $\zeta \in K \Subset G^*$. Поскольку $G^* \Subset G$, то при $z \in G^*$ очевидно имеем $g^*(z,\zeta) < g(z,\zeta)$. Формула (1) дает *количественную* оценку последнего неравенства.

Формула Адамара (1) имеет многочисленные приложения, так как через функцию Грина выражаются в конечном итоге все основные функции, связанные с областью G (так называемые “domain-functions”): гармонические меры компонент границы γ, функция Неймана, ядра Бергмана и Сегё, соответствующая матрица периодов (см. прежде всего [1], а также [16; приложение, § 3,

Автор поддержан РФФИ (грант № 11-01-00330-а) и программой “Ведущие научные школы” (грант НШ-8033.2010.1).

формула (3.3)] и [18]). Тем самым и вариации этих функций могут быть выражены через вариацию функции Грина, а значит – представлены в явном виде с помощью формулы (1) (см. [15], [1], [16], [13], [7], [8], [20], [10]).

Доказательство (1) довольно коротко. Действительно, по формуле Тейлора для $z \in \gamma$ имеем (все дальнейшие соотношения выполняются равномерно по $\zeta \in K \Subset G$):

$$g(z^*,\zeta) = g(z,\zeta) + \frac{\partial g(z,\zeta)}{\partial n_z}\delta n_z + O(\varepsilon^2) = \frac{\partial g(z,\zeta)}{\partial n_z}\delta n_z + O(\varepsilon^2), \quad z \in \gamma. \tag{2}$$

Следовательно,

$$g(z,\zeta)\big|_{\gamma^*} = g(z^*,\zeta) = \frac{\partial g(z,\zeta)}{\partial n_z}\delta n_z + O(\varepsilon^2) \tag{3}$$

и $g(z,\zeta) = -\log|z-\zeta| + \{\text{регулярная часть}\}$ при $z \in G^*$. Теперь уже ясно, что надо делать: для $w \in \gamma^*$ по граничным значениям $u_0(w) = \partial g(w,\zeta)/\partial n_w \delta n_w$ на кривой γ^* надо с помощью формулы Грина построить гармоническую в области G^* функцию $u(z)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma^*} u_0(w)\frac{\partial g^*(w,z)}{\partial n_w}\,ds_w = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{\partial g(w,\zeta)}{\partial n_w}\delta n_w\frac{\partial g(w,z)}{\partial n_w}\,ds_w + O(\varepsilon^2) \tag{4}$$

и посмотреть разность $k(z,\zeta) := g(z,\zeta) - u(z)$ (в (4) мы заменили[1] γ^* на γ и $g^*(w,z)$ на $g(w,z)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$). Имеем: $k(z,\zeta) = -\log|z-\zeta| + \{\text{регулярная часть}\}$ в G^*,

$$k(z,\zeta)\big|_{\gamma^*} = g(z^*,\zeta) - u(z^*) = g(z^*,\zeta) - \frac{\partial g(z,\zeta)}{\partial n_z}\delta n_z + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2). \tag{5}$$

Но по определению $g^*(z^*,\zeta) = 0$, $z^* \in \gamma^*$. Таким образом, для гармонической в G^* функции $g^*(z,\zeta) - k(z,\zeta)$ имеем: $g^*(z,\zeta) - k(z,\zeta) = O(\varepsilon^2)$ на γ^*. Следовательно, по принципу максимума разность $g^*(z,\zeta) - k(z,\zeta) = O(\varepsilon^2)$ всюду в G^* (и равномерно по $\zeta \in K \Subset G$). Отсюда и (4) вытекает, что

$$\begin{aligned} g^*(z,\zeta) - g(z,\zeta) &= -u(z) + O(\varepsilon^2) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{\partial g(w,\zeta)}{\partial n_w}\frac{\partial g(w,z)}{\partial n_w}\delta n_w\,ds_w + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{6}$$

Формула (6) и есть вариационная формула Адамара (1). Отметим, что формула Адамара (1) справедлива и при более общих вариациях границы G вдоль нормали к γ: границу можно сдвигать вдоль нормали с помощью аналитической функции $\psi(s)$ переменного знака (подробнее см. [16], [17; глава 7]).

§ 2. Формулы Шиффера

Формула Адамара (1) возникает в процессе *граничной* вариации исходной области G. Рассмотрим теперь *внутреннюю* вариацию Шиффера [15] (см. также [1], [16]):

$$z^* = z + \frac{e^{2i\varphi}\rho^2}{z - z_0}, \tag{7}$$

[1]Из (3) вытекает, что $g^*(z,\zeta) - g(z,\zeta) = O(\varepsilon)$ равномерно по $z \in \gamma^*, \zeta \in K$, и такая же оценка справедлива для нормальных производных.

где точка $z_0 \in G$, $0 \leqslant \varphi < \pi$, $\rho > 0$ – малый параметр. Преобразование (7) конформно и однолистно во внешности круга $|z - z_0| > \rho$ и отображает внешность круга на внешность отрезка $[z_0 - 2\rho e^{i\varphi}, z_0 + 2\rho e^{i\varphi}]$ с центром в точке z_0 длины 4ρ. Тем самым при достаточно малых $\rho > 0$ кривая γ конформно и однолистно преобразуется в аналитическую кривую γ^* такого же гомотопического класса, ограничивающую новую область G^*, $z_0 \in G^*$. Новую область G^* естественно рассматривать как вариацию исходной области G, полученную в результате преобразования (7). Хорошо известно, что внутренняя вариация Шиффера (7) приводит к следующей вариации функции Грина (см. [15], [1], [16; приложение, § 3, формула (П3.23)]):

$$g^*(z,\zeta) - g(z,\zeta) = \mathrm{Re}\biggl\{e^{2i\varphi}\rho^2\biggl(P'(z_0,\zeta)P'(z_0,z) - \frac{P'(\zeta,z)}{\zeta - z_0} - \frac{P'(z,\zeta)}{z - z_0}\biggr)\biggr\} + O(\rho^4), \tag{8}$$

где $P(w,\zeta) = g(w,\zeta) + ih(w,\zeta) = -\log(w - \zeta) + U(w,\zeta)$ – комплексная функция Грина, $h(w,\zeta)$ – функция, гармонически сопряженная $g(w,\zeta)$. Функции $h(w,\zeta), P(w,\zeta)$ – многозначные функции в области D; производная $P'(w,\zeta)$ функции $P(w,\zeta)$ – однозначная функция (через $P'(w,\zeta)$ здесь и далее обозначается производная функции $P(w,\zeta)$ по первому аргументу: $P'(w,\zeta) = 2\partial g(w,\zeta)/\partial w$). Формула (8) будет доказана ниже в § 3. Отметим, что формула (8) справедлива для *произвольной* конечносвязной области G с *произвольной* границей – это доказывается предельным переходом (подробнее см. [16], а также § 3 ниже). При помощи формулы Тейлора из (8) получаем вторую вариационную формулу Шиффера, в которой учитывается и вариация точек $z, \zeta \in G$:

$$g^*(z^*,\zeta^*) - g(z,\zeta) = \mathrm{Re}\bigl\{e^{2i\varphi}\rho^2 P'(z_0,\zeta)P'(z_0,z)\bigr\} + O(\rho^4). \tag{9}$$

Вариационные формулы Шиффера (8)–(9) также приводят к явным вариационным формулам для всех основных функций, связанных с областью G (см. [1], [18]). Эти формулы имеют многочисленные применения. Прежде всего – в геометрической теории функций комплексного переменного при решении задач, связанных с проблемой модулей, и при описании соответствующей экстремальной метрики (см. [5], [9]). В последнее время с их помощью удалось доказать существование S-кривых для некоторых достаточно общих теоретико-потенциальных задача равновесия, интересных с точки зрения их приложений к различным актуальным задачам математической физики и теории рациональных аппроксимаций аналитических функций (см. [6], [10], [2], [11], [12]).

§ 3. Обобщенная вариация

Пусть теперь $h(z)$ – *произвольная* функция, голоморфная в некоторой окрестности V кривой γ. Определим преобразование (вариацию) переменного $z \mapsto z_t$ формулой

$$z_t = z + th(z), \tag{10}$$

где t – малый комплексный параметр (см. [14], [6], [10], [11]). Ясно, что при достаточно малом t, $|t| \leqslant \varepsilon_0$, преобразование (10) конформно и однолистно в

V и переводит кривую γ в новую кривую γ^*, ограничивающую новую область G^*. Отметим, что в (10) в качестве частных случаев содержатся вариация Адамара и вариация Шиффера. Цель настоящей работы – найти формулу достаточно общего характера для вариации функции Грина исходной области G при преобразовании (10) и такую, что из нее вытекают вариационные формулы Адамара (1) и Шиффера (8), а также некоторые другие явные формулы, уже нашедшие приложения (см. [6], [10], [2], [11]).

Сдвиг $\Delta z = th(z)$ от точки z к точке $z^* = z_t$ происходит теперь не по нормали. Но на γ имеем: $\partial g(z,\zeta)/\partial s_z = 0$. Поэтому в формуле Тейлора вклад в приращение функции Грина все равно дает только сдвиг δn_z по нормали n_z. Найдем его выражение через исходный сдвиг $\Delta w = th(w)$. Пусть α_w – направление внутренней по отношению к области D нормали к кривой γ в точке w (т.е. угол, который нормаль составляет с осью x-ов), β_w – направление касательной (т.е. угол, который касательная составляет с осью x-ов, отсчитываемый в положительном направлении – область G остается слева при обходе по γ). Имеем: $\alpha_w - \beta_w = \pi/2$ и, следовательно, $\delta n_w = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w}\Delta w) = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w}th(w))$. Поступим теперь так же как в § 1. Тогда по формуле Тейлора с учетом того, что $\partial g(w,\zeta)/\partial s_w = 0$ при $w\in\gamma$, получаем для $w^* = w_t$

$$g(w^*,\zeta) = g(w,\zeta) + \frac{\partial g(w,\zeta)}{\partial n_w}\delta n_w + O(\varepsilon^2) = \frac{\partial g(w,\zeta)}{\partial n_w}\operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w}th(w)) + O(\varepsilon^2), \quad w\in\gamma. \tag{11}$$

Для комплексной функции Грина $P(w,\zeta)$ справедливы соотношения

$$P(w,\zeta) = -\log(w-\zeta) + U(w,\zeta), \qquad P'(w,\zeta) = -\frac{1}{w-\zeta} + U'(w,\zeta). \tag{12}$$

При $w\in\gamma$, $\zeta\in K$ имеем: $|dw| = ds_w$, $dw = e^{i\beta_w}\,ds_w$, тем самым, $ds_w = e^{-i\beta_w}dw \in \mathbb{R}$; кроме того,

$$\frac{\partial g(w,z)}{\partial n_w} = P'(w,z)e^{i\alpha_w} = iP'(w,z)w' > 0 \tag{13}$$

и $\delta n_w = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w}\Delta w) = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w}th(w))$. Теперь снова для $w\in\gamma^*$ по граничным значениям $u_0(w) = \partial g(w,z)/\partial n_w = P'(w,z)e^{i\alpha_w}$ на кривой γ^* (см. (13)) с помощью формулы Грина построим гармоническую в области G^* функцию $u(z)$ и учтем, что (см. (4) и (13))

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(w,\zeta)}{\partial n_w}\frac{\partial g(w,z)}{\partial n_w}\delta n_w\,ds_w &= P'(w,\zeta)e^{i\alpha_w}P'(w,z)e^{i\alpha_w}\operatorname{Re}(e^{-i\alpha_w}\Delta w)e^{-i\beta_w}\,dw\\ &= \operatorname{Re}\{P'(w,\zeta)e^{i\alpha_w}P'(w,z)e^{i\alpha_w}e^{-i\alpha_w}th(w)e^{-i\beta_w}\,dw\}\\ &= \operatorname{Re}\{iP'(w,\zeta)P'(w,z)th(w)\,dw\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Рассуждая теперь аналогично § 1 и используя (14), окончательно получаем

$$g^*(z,\zeta) - g(z,\zeta) = \operatorname{Re}\left\{\frac{t}{2\pi i}\int_\gamma P'(w,\zeta)P'(w,z)h(w)\,dw\right\} + O(t^2), \tag{15}$$

$|t| = \varepsilon$ (ср. (1)). Отметим, что в силу конформной инвариантности функции Грина, формула (15) справедлива и для области G, содержащей бесконечно удаленную точку.

Из (15) очевидным образом вытекает вариационная формула Адамара (1).

Получим теперь из (15) вариационную формулу Шиффера (8). Пусть $z_0 \in G$, $t = e^{i2\varphi}\rho^2$, $h(z) = 1/(z - z_0)$, $z^* = z_t = z + th(z)$. Функция h голоморфна в некоторой окрестности γ и, следовательно, мы можем воспользоваться формулой (15). Поскольку $P'(w,z) = -1/(w - z) + A(w,z)$, где функция $A = U'$ голоморфна в G, то подынтегральное выражение в (15) имеет в области G простые полюсы в точках $w = z, \zeta, z_0$ с вычетами $-1, -1, 1$ соответственно. Следовательно, по теореме о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P'(w,\zeta)P'(w,z)h(w)\,dw = -\frac{P'(\zeta,z)}{\zeta - z_0} - \frac{P'(z,\zeta)}{z - z_0} + P'(z_0,\zeta)P'(z_0,z). \quad (16)$$

Непосредственно из (15) и (16) вытекает вариационная формула Шиффера (8).

Избавимся теперь от требования аналитичности границы γ. А именно, докажем теперь формулу (8) для области G, граница которой состоит из конечного числа произвольных континуумов.[2] Пусть $z, \zeta \in K \Subset G$ и пусть $\{G_n\}$ – последовательность областей с аналитическими границами, исчерпывающая область G: $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = G$. Для каждой из G_n формула (8) справедлива равномерно по $z, \zeta \in K \Subset G$ и $z_0 \in G$. Анализ доказательства, проведенного выше, показывает, что величины, входящие в остаточный член $O(t^2)$ в (15), зависят только от *интегралов* от гармонических функций и их производных, связанных с областью G_n. В силу того, что значения вышеуказанных интегралов от гармонических функций *не зависят от кривых интегрирования*, мы можем при процессе предельного перехода $G_n \to G$ при $n \to \infty$ *зафиксировать* кривые, по которым ведется интегрирование и считать, например, что интегрирование ведется по границе $\gamma_0 = \partial G_0$ некоторой начальной области G_0. Тогда при $G_n \to G$ (в вышеуказанном смысле) все гармонические функции для G_n, входящие в $O(t^2)$, будут вместе со всеми своими производными равномерно на γ_0 сходиться к соответствующим функциям для G, так что величина $O(t^2)$ будет оставаться равномерно ограниченной для $z, \zeta \in K$. Для этих же z, ζ, z_0 величины, связанные с функцией Грина для области G_n, будут сходиться к соответствующим величинам для области G. Таким образом, из формулы (8) для G_n предельным переходом получается соответствующая вариационная формула для функции Грина области G (с заменой $O(\rho^4)$ на $o(\rho^2)$).

Пусть теперь вне G заданы и зафиксированы некоторые точки $a_1, \dots, a_m$ (например, все $a_k \in \gamma$). Положим $A_m(z) = \prod\limits_{k=1}^{m}(z - a_k)$, $q_\mu(z) = \prod\limits_{j=0}^{\mu}(z - z_j)$, где $z_0, z_1, \dots, z_\mu$ – произвольные различные точки области G, $\mu \geqslant m + 1$. Пусть $h(z) = A_m(z)/q_\mu(z)$, тогда вариация $z \mapsto z_t = z + th(z)$ удовлетворяет вышеперечисленным условиям и оставляет неподвижными точки $a_1, \dots, a_m$. Такая вариация рассматривается как композиция вариаций Шиффера и естественным образом возникает при изучении проблемы модулей (см. [9; глава 0]). Из

[2] Ясно, что приводимые рассуждения, основанные на предельном переходе, справедливы для *произвольной* области G.

формулы (15) с помощью теоремы о вычетах получаем (ср. (9)):

$$g^*(z^*,\zeta^*)-g(z,\zeta)=\operatorname{Re}\biggl\{t\sum_{j=0}^{\mu}\frac{P'(z_j,\zeta)P'(z_j,z)A_m(z_j)}{q'_\mu(z_j)}\biggr\}+O(t^2) \qquad (17)$$

при $z,\zeta\in K\Subset G$. Предельным переходом как и выше устанавливается справедливость (17) для конечносвязной области с произвольной границей (с заменой $O(t^2)$ на $o(t)$; разумеется так же, как и в [9] некоторые из точек z_j можно было бы взять и вне области G, тогда в окончательной формуле (17) они бы просто отсутствовали).

Пусть наконец все точки z_j совпадают: $z_j=z_0\in G$, $j\geqslant 1$, т.е. $q_\mu(z)=(z-z_0)^{\mu+1}$. Тогда вместо (17) получаем:

$$g^*(z^*,\zeta^*)-g(z,\zeta)=\frac{1}{\mu!}\operatorname{Re}\bigl\{t\bigl(P'(w,\zeta)P'(w,z)A_m(w)\bigr)^{\mu}_{w=z_0}\bigr\}+O(t^2) \qquad (18)$$

при $z,\zeta\in K\Subset G$. Справедливость (18) для конечносвязной области с произвольной границей устанавливается предельным переходом как и выше. Вариация функции Грина вида (18) успешно применялась в различных задачах математической физики и теории аппроксимаций (см. [6], [10], [2], [11]).

§ 4. Заключение

В работе получена достаточно общая вариационная формула (см. (15)) для функции Грина, из которой вытекают, в частности, классические вариационные формулы Адамара (1) и Шиффера (8).

Список литературы

[1] P. R. Garabedian, M. Schiffer, “Identities in the theory of conformal mapping”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **65** (1949), 187–238.

[2] Andrei A. Gonchar, Evgenii A. Rakhmanov, Sergey P. Suetin, *On the convergence on nonlinear Pade–Chebyshev approximations to the multivalued analytic functions, variation of equilibrium energy and S-property of stationary compacts*, `http://arxiv.org/abs/1012.0170`, 2010, 49 pp.

[3] J. Hadamard, *Memoire sur le probleme d'analyse relatif a l'equilibre des plaques elastiques encastrees*, Mem. Sav. etrang. (2) 33, **4**, 1908, 128 S.; *Oeuvres*, **2**, 1968.

[4] J. Hadamard, *Qeuvres de Jacques Hadamard. Tomes I, II, III, IV*, Comite de publication des oeuvres de Jacques Hadamard, Tome II, eds. M. Frechet, P. Levy, S. Mandelbrojt, L. Schwartz, Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1968.

[5] James A. Jenkins, “On the existence of certain general extremal metrics”, *Ann. of Math. (2)*, **66** (1957), 440–453.

[6] S. Kamvissis, E. A. Rakhmanov, “Existence and regularity for an energy maximization problem in two dimensions”, *J. Math. Phys.*, **46**:8, 083505 (2005), 24 pp.

[7] I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin, “Laplacian growth and Whitham equations of soliton theory”, *Phys. D*, **198**:1–2 (2004), 1–28.

[8] I. Krichever, A. Marshakov, A. Zabrodin, “Integrable structure of the Dirichlet boundary problem in multiply-connected domains”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:1 (2005), 1–44.

[9] Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы*, Труды МИАН, **139**, Наука, Л., 1980.

[10] A. Martínez-Finkelshtein, E. Rakhmanov, "Critical Measures, Quadratic Differentials, and Weak Limits of Zeros of Stieltjes Polynomials", *Comm. Math. Phys.*, **302**:1 (2011), 53–111; `http://arxiv.org/abs/0902.0193`.

[11] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, "Вариация равновесной меры и S-свойство стационарных компактов", *УМН*, **66**:1 (2011), 183–184.

[12] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, "Вариация равновесной энергии и S-свойство стационарных компактов", *Матем. сборник*, 2011 (в печати.).

[13] A. Marshakov, P. Wiegmann, A. Zabrodin, "Integrable structure of the Dirichlet boundary problem in two dimensions", *Comm. Math. Phys.*, **227**:1 (2002), 131–153.

[14] Е. А. Перевозникова, Е. А. Рахманов, *Вариация равновесной энергии и S-свойство компактов минимальной емкости*, Препринт, М., 1994.

[15] M. Schiffer, "Hadamard's formula and variation of domain-functions", *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 417–448.

[16] М. Шиффер, "Некоторые новые результаты в теории конформных отображений", Приложение к книге: Р. Курант, *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, ИЛ, М., 1953, 234–301; R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, With an appendix by M. Schiffer, Springer, New York–Heidelberg, 1977.

[17] М. Шиффер, Д. К. Спенсер, *Функционалы на конечных римановых поверхностях*, ИЛ, М., 1957; M. Schiffer, Donald C. Spencer, *Functionals of finite Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954.

[18] E. Schippers, W. Staubach, "Variation of Neumann and Green functions under homotopies of the boundary", *Israel J. Math.*, **173** (2009), 279–303.

[19] S. E. Warschawski, "On Hadamard's variation formula for Green's function", *J. Math. Mech.*, **9** (1960), 497–511.

[20] A. Zabrodin, *Random matrices and Laplacian growth*, `arXiv:0907.4929`, 2009, 20 pages.

С. П. Суетин (S. P. Suetin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: `suetin@mi.ras.ru`

Дата последнего обновления: 07.06.2011