# Обобщённые вероятностные теории и выпуклые алгебры эффектов

В.И. Яшин (yashin.vi@phystech.edu)

27.04.2022

Семинар "Алгебраическая и категорная логика"

## Вводные замечания

- Предмет оснований квантовой механики (quantum foundations) – изучение математических структур, возникающих в физике. То есть, связь с физикой мала.
- Доклад обзорный, цель – ознакомить с основными структурами.
- Не все утверждения строгие, не везде есть детали.

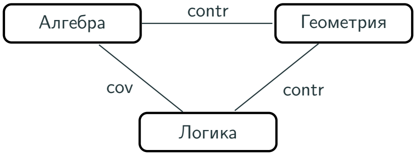
# План

1. В общем о физических теориях
   - детерминированные/статистические (чёткие/нечёткие)
   - классические/квантовые (коммутативные/некоммутативные)
2. Выпуклые алгебры эффектов
   - обобщённые вероятностные теории
   - алгебры эффектов

Задавайте вопросы!

# Математическая структура физических теорий

При изучении физических моделей могут возникать три точки зрения на их описание.




**Геометрия**

Пространство состояний системы

**Алгебра**

Алгебра наблюдаемых над системой

**Логика**

Структура высказываний о системе

Они соответствуют эквивалентностям в соответствующих категориях.

Высказывания суть наблюдаемые, поэтому “Алгебра” и “Логика” часто очень похожи.

# Пример: Точка на прямой.

Рассмотрим классическую одномерную физическую систему.

**Геометрия**

Каждое состояние представляется парой $(q, p)$ – координата и импульс .

Фазовое пространство $\mathbb{R}_p \times \mathbb{R}_q$.

**Алгебра**

Примеры наблюдаемых: импульс $p$, координата $q$, энергия осциллятора $\frac{1}{2}(p^2 + q^2)$.

$L^\infty(\mathbb{R}_p \times \mathbb{R}_q)$ – алгебра наблюдаемых.

**Логика**

$\mathcal{B}(\mathbb{R}_p \times \mathbb{R}_q)$ – алгебра высказываний о системе.

Примеры: “система имеет положительную координату”, “энергия системы равна нулю”.

Плохой пример: “координата рациональна”.

# Пример: Бит.

Рассмотрим бит как физическую систему.

**Геометрия**

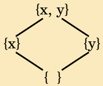
Состояния: 0, 1, фазовое пространство $\{0, 1\}$.

**Алгебра**

Алгебра наблюдаемых $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. “Если 0, то $f_0$, если 1, то $f_1$.”

**Логика**

Булева решётка $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.




Аналогично выглядит любая конечная система с конечным числом состояний.

# Классическая механика над фазовым пространством

Классические физические системы представляются как

**Геометрия**

$\Omega$ – измеримое пространство.

**Алгебра**

$L^\infty(\Omega)$ – алгебра ограниченных функций.

**Логика**

$\mathcal{B}(\Omega)$ – булева решётка измеримых множеств (с точностью до пренебрежимых).

**Спаривание состояния и наблюдаемой**

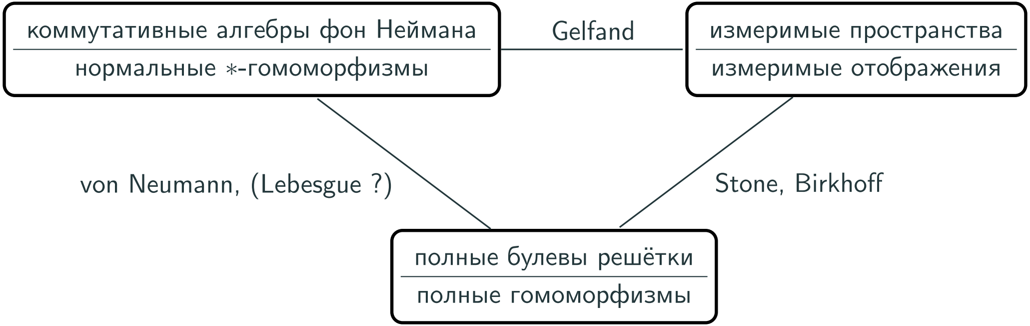
Если дано состояние $\omega \in \Omega$ и наблюдаемая $f \in L^\infty(\Omega)$, то важна функция $\langle \omega, f \rangle = f(\omega)$.

Варьируя $\omega$, однозначно (с точностью до...) получаем $f$, и наоборот.

Высказывание $m$ суть $\{0,1\}$-значная наблюдаемая, $\langle \omega, m \rangle = 1 \;\Leftrightarrow\; \omega \in m$.

# Классическая механика (абстрактная формулировка)

Можно говорить об эквивалентностях категорий.

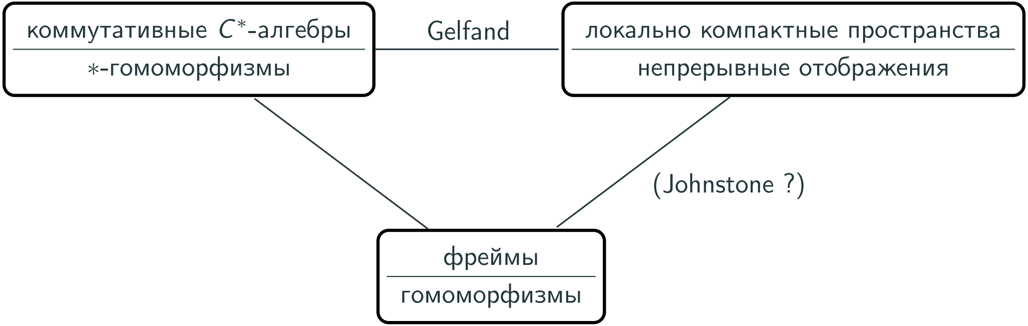



(Точнее: гиперстоуновы пространства, локализуемые булевы алгебры arXiv:2005.05284)

Можно усилять структуру: непрерывность, гладкость, алгебраичность, конечность, ...

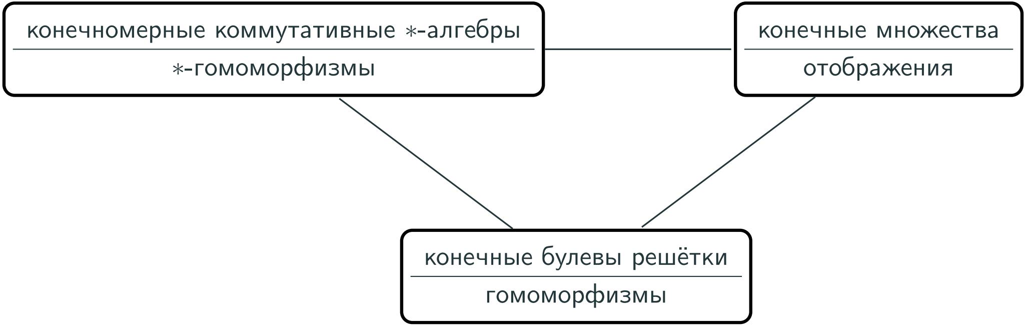
# Непрерывная классическая механика (абстрактная формулировка)

Можно рассмаривать непрерывные теории.



# Конечная классическая механика (абстрактная формулировка)

Удобно рассматривать конечный случай, когда нет аналитических тонкостей.




Эти категории моделируют классические вычисления.

# Статистическая механика : геометрия и алгебра

Предположим, что мы не имеем полного знания о системе (например, система открыта).

**Геометрия**

Состоянием будем называть распределение над $\Omega$, пространство состояний $\mathcal{P}(\Omega)$.
Чистые состояния имеют вид $\delta_\omega(\cdot)$ и являются экстремальными точками $\mathcal{P}(\Omega)$.

Случайные отображения задаются как марковские ядра $\kappa : X \to \mathcal{P}(Y)$, $(x, \Gamma) \mapsto \kappa(x, \Gamma)$.
Действие $\kappa(p)(\Gamma) = \int_X \kappa(x, \Gamma) p(dx)$, композиция $(\nu \circ \kappa)(x, \Gamma) = \int_Y \nu(y, \Gamma) \kappa(x, dy)$.

**Алгебра**

$L^\infty(\Omega)$ – пространство случайных величин. (Банахова решётка с единицей.)
Морфизмы – положительные, сохраняющие единицу отображения.

**Спаривание состояния и наблюдаемой**

Если дано состояние $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ и наблюдаемая $f \in L^\infty(\Omega)$, то задана функция
$\langle p, f \rangle = \int_\Omega f(\omega) p(d\omega)$.
Среднее от случайной величины по вероятности. Невырожденная билинейная форма.

# Статистическая механика : логика

Из такого описания естественно возникает логика нечётких множеств.

## Логика

Нечётким множеством $m$ является наблюдаемая со значениями $[0,1]$.
Каждой точке $\omega \in \Omega$ ставится "степень включения" $0 \leq m(\omega) \leq 1$.
Обозначим пространство $\mathcal{E}(\Omega)$. Это булева алгебра с действием $[0,1]$:

$$(m \wedge n)(\omega) = m(\omega) \wedge n(\omega), \quad (m \vee n)(\omega) = m(\omega) \vee n(\omega),$$
$$(\neg m)(\omega) = 1 - m(\omega), \quad (\lambda \cdot m)(\omega) = \lambda m(\omega) \text{ (для } 0 \leq \lambda \leq 1).$$

Морфизмы – гомоморфизмы булевых решёток, уважающие действие: $\phi(\lambda m) = \lambda \phi(m)$.

## Спаривание состояния и высказывания

Если $p \in \mathcal{P}(\Omega)$ и $m \in \mathcal{E}(\Omega)$, то $\langle p, m \rangle = \int_\Omega m(\omega) p(d\omega)$.
"Вероятность того, что система удовлетворяет $m$ в состоянии $p$".

# Пример: Нечёткий бит.

Пусть ранее рассмотренный бит “забарахлил”, и мы не способны с точностью гарантировать его состояние, и что операции не случайны.

**Геометрия**

Фазовое пространство $\Omega = \{0, 1\}$, пространство состояний $\mathcal{P}(\Omega) = \{\, (p, 1-p) \mid 0 \leq p \leq 1 \,\}$

**Алгебра**

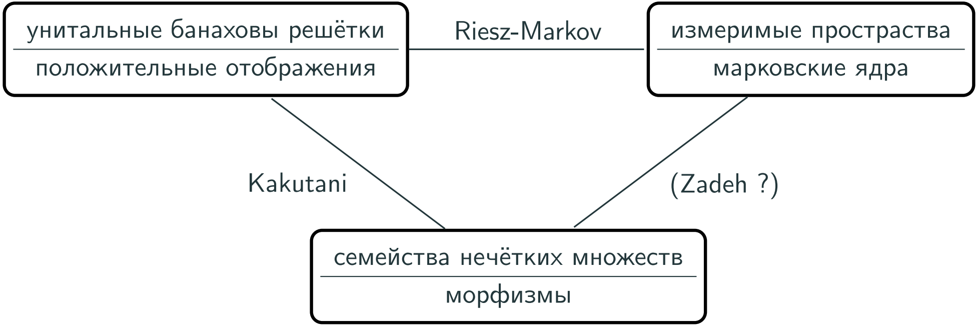
Алгебра наблюдаемых $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. “Если 0, то $f_0$, если 1, то $f_1$.”

**Логика**

Булева решётка вида $\mathcal{E}(\Omega) = [0, 1] \times [0, 1]$ (“квадрат”).

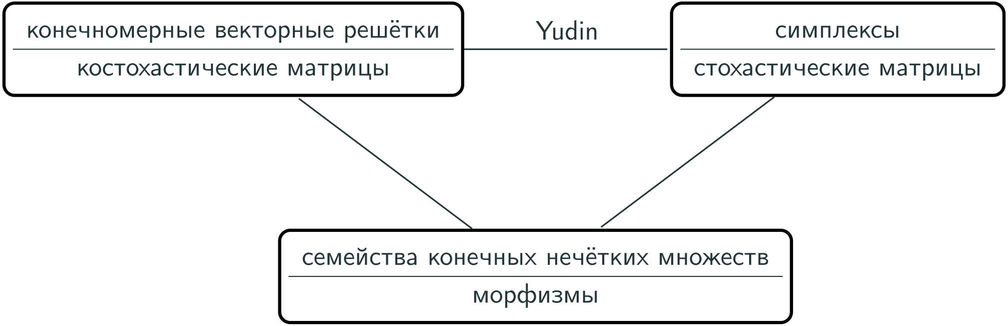
# Статистическая механика (абстрактная формулировка)

Классическая статистическая механика описывается категориями вида



# Конечная статистическая механика (абстрактная формулировка)

В конечном случае категории принимают вид




Эти категории моделируют классические вероятностные вычисления.

# Различие чётких/нечётких (sharp/unsharp) теорий

- Замкнутые/открытые физические системы.
- Ослабляется алгебраическая структура: гомоморфизмы/положительные отображения.
- Высказывания о системе становятся нечёткими (fuzzy). $\{0, 1\} \to [0, 1]$.
- Чёткие теории вкладываются в нечёткие. $\omega \mapsto \delta_\omega(\cdot)$.

# Чёткая квантовая механика : вводные слова

- При изучении физических систем оказалось, что не все наблюдаемые коммутируют. Такое поведение наблюдается среди операторов над гильбертовыми пространствами.
- Коммутативные алгебры $\to$ некоммутативные алгебры.
  Дистрибутивные решётки $\to$ недистрибутивные решётки.
  Характеры $\to$ неприводимые представления.

# Квантовая механика над гильбертовым пространством : геометрия и алгебра

При изучении физических систем оказалось, что не все наблюдаемые коммутируют.
Такое поведение моделируется операторами над гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}$.

**Геометрия**

Чистыми состояниями называют векторы $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (с точностью до фазы).
Пространство состояний – проективное пространство.

Отображения задаются унитарными операторами $U$ (с точностью до фазы).

**Алгебра**

Наблюдаемая – ограниченный оператор. Алгебра наблюдаемых $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Отображения задаются унитарными операторами $U$ (с точностью до фазы).

**Спаривание состояния и наблюдаемой (в чётком случае)**

Если $\psi$ состояние и $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $B\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle$, то $\langle\psi, B\rangle = \lambda$.
"Значение наблюдаемой на состоянии $|\psi\rangle$ (при условии, что они коммутируют)".

Высказывания о системе имеют вид "$\psi$ лежит в подпространстве $L \subseteq \mathcal{H}$".

**Логика**

Каждому замкнутому подпространству $L \subseteq \mathcal{H}$ соответствует проектор $\Pi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
Множество проекторов $\Pi \in \mathfrak{P}(\mathcal{H})$ образует полную решётку, $\Pi^{\perp} = I - \Pi$.
Решётка не дистрибутивна, но ортомодулярна: если $a \leq b$, то $b = a \vee (a^{\perp} \wedge b)$.

**Спаривание состояния и высказывания (в чётком случае)**

$\langle \psi, \Pi \rangle = 1 \Rightarrow$ "$\psi$ лежит в подпространстве $L \subseteq \mathcal{H}$"
$\langle \psi, \Pi \rangle = 0 \Rightarrow$ "$\psi$ ортогональная $L \subseteq \mathcal{H}$"

# Пример: Квантовый бит.

Рассмотрим двууровневую квантовую систему.

**Геометрия**

Состояния: $|\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle$.

**Алгебра**

Алгебра $\mathbb{M}_2$, задана операторами Паули.

**Логика**

Ортомодулярная решётка $\{\emptyset\} \cup \{|\psi\rangle\} \cup \{\mathbb{C}^2\}$.

# Квантовая механика (по фон Нейману)

Более естественно рассмотреть произвольные некоммутативные алгебры.

**Алгебра**

Вместо $L^\infty(\Omega)$ будем рассматривать произвольные алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ как алгебры наблюдаемых.

Морфизмами будем называть нормальные $*$-гомоморфизмы.

**Геометрия**

Состояниям соответствует семейство неприводимых представлений (спектр) на $\mathcal{M}$. По ГНС конструкции, это однозначным образом экстремальные положительные унитальные функционалы на $\mathcal{M}$.

**Логика**

Полная ортомодулярная решётка проекторов из $\mathcal{M}$.

# О ГНС-конструкции

Пусть $\pi$ – неприводимое представление $\mathcal{M}$ на $\mathcal{H}_\pi$, $|\xi\rangle \in \mathcal{H}_\pi$ циклический вектор. Тогда задаётся положительный унитальный функционал

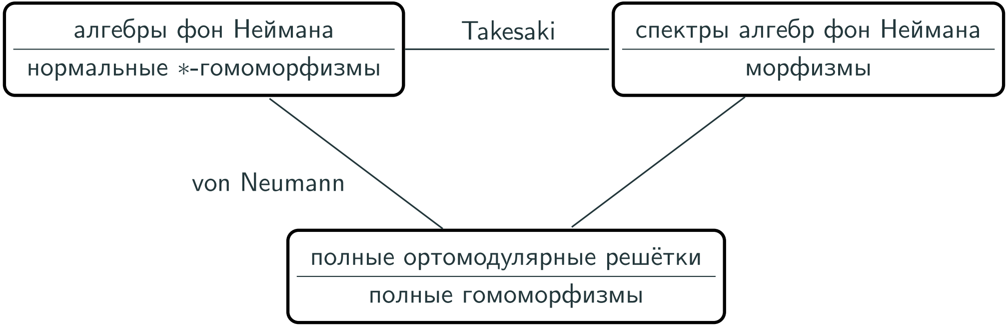
$$\rho(b) = \langle\xi|\, \pi(b)\, |\xi\rangle \,.$$

Обратно, любое циклическое представление соответствует некоторому функционалу, экстремальные функционалы соответствуют неприводимым представлениям.

**Спаривание состояния и наблюдаемой**

Если $b \in \mathcal{M}$ и $\pi$ неприводимое представление $\mathcal{M}$, то
$\pi(b) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\pi)$ – непонятно что означает (квантовая информация задаётся операторами).
Среднее значение $\rho(b) = \langle\xi|\, \pi(b)\, |\xi\rangle$ – теряется квантовая информация $\to$ нечёткость.

# Квантовая механика (Абстрактная формулировка)



# Конечная квантовая механика (Абстрактная формулировка)

алгебры $\bigoplus_k \mathbb{M}_{n_k}$

$*$-гомоморфизмы $\bigoplus_k \phi_k$

пространства конечномерных представлений

гомоморфизмы

OML конечной высоты

гомоморфизмы

В этих категориях моделируются (детерминированные) квантовые вычисления.

# Статистическая квантовая механика

Для описания открытых квантовых систем недостаточно положительности.

Отображение $\phi$ *вполне положительно*, если $\phi \otimes \mathrm{id}_n$ вполне положительно для всех $n$, то есть при параллельном использовании каналов положительность сохраняется.

Будем называть каналами вполне положительные сохраняющие единицу отображения.

**Алгебра**

Алгебры фон Неймана и нормальные каналы.

**Геометрия**

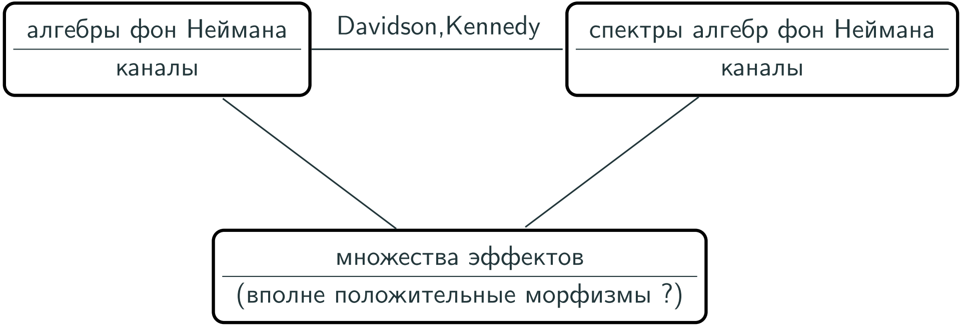
Состояния – все вполне положительные отображения вида $\mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Или же, пространство унитальных положительных функионалов.

**Логика**

Эффектами называются операторы $m \in \mathcal{M}$, такие что $0 \leq e \leq I$.

# Статистическая квантовая механика (Абстрактная формулировка)



# Отступление: эффектусы

У рассмотренных категорий наблюдается следующие свойства
(с точностью до двойственности).

- Имеется терминальный элемент 1, имеются копроизведения $+$.
- Копроизведения (в определённом смысле) симметричны.
- Состояния в объекте $X$ описываются как $\mathrm{Hom}(1, X)$.
  Высказывания описываются как объекты $\mathrm{Hom}(X, 1+1)$.
  Измерения с $n$ исходами как $\mathrm{Hom}(X, n \cdot 1)$.
- $(*)$ Имеются тензорные произведения.

В терминах категорий с такими свойствами удаётся описывать многое.

(Работы B. Jacobs'a arXiv:1205.3940, возможен рассказ на следующем семинаре.)

## Обобщённые вероятностные теории (GPT)

В классическом случае пространство состояний образует симплекс.

В GPT пространство состояний есть произвольное (конечномерное) выпуклое тело.

**Геометрия**

Пространство состояний $K$ – выпуклое тело. Морфизмы – афинные отображения.

**Алгебра**

Наблюдаемая $f$ – афинная функция на $K$. Пространство наблюдаемых – упорядоченное векторное пространство с архимедовой единицей (функицональная система). Морфизмы – сохраняющие единицу положительные отображения.

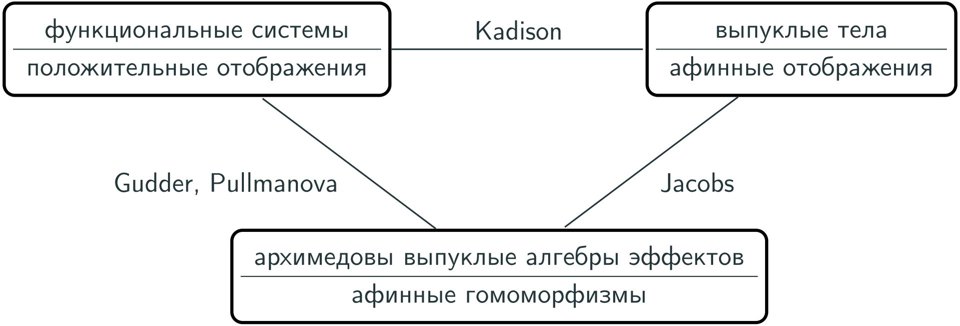
**Логика**

Высказывания $m$ – афинные функции в $[0, 1]$ со структурой архимедовой выпуклой алгебры эффектов.

**Замечание**

Отсутствует структура вполне положительности!

# Обобщённые вероятностные теории (Абстрактная формулировка)

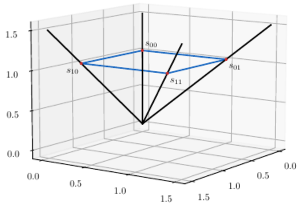


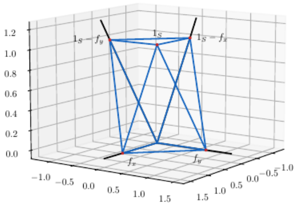
# Пример: Boxworld theory

Рассмотрим теорию всех стохастических отображений (чёрных ящиков) из бита в бит. Каждое состояние – некоторое отображение. Чистые состояния имеют вид:

$$s_{00} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad s_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

При этом $\frac{1}{2}(s_{00} + s_{11}) = \frac{1}{2}(s_{10} + s_{01})$.




Обладает наибольшими из возможных корреляциями.

# Алгебры эффектов

Алгебра эффектов $(E, 0, 1, \oplus)$, где $E$ множество, $0, 1$ элементы, $\oplus$ – частично заданная функция. На $E$ задано отношение $\perp$, такое что если $a \perp b$, то можно определить $a \oplus b$ и выполнены аксиомы:

(1) Коммутативность: Если $a \perp b$, то $b \perp a$ и $a \oplus b = b \oplus a$.

(2) Ассоциативность: Если $a \perp b$ и $(a \oplus b) \perp c$, то $b \perp c$, $a \perp (b \oplus c)$ и $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.

(3) Ортодополнение: Для всех $a$ найдётся единственный $a'$, такой что $a \perp a'$ и $a \oplus a' = 1$

(4) Свойство нуля: Если $a \perp 1$, то $a = 0$.

Отображение $\phi : E_1 \to E_2$ называется морфизмом алгебр эффектов, если $\phi(a \oplus b) = \phi(a) \oplus \phi(b)$ и $\phi(1) = 1$.

# Простейшие свойства алгебр эффектов

- Структура порядка: Определим $a \leq b$, если $a \oplus c = b$.
  - $a \perp b$ эквивалентно $a \leq b'$
  - из $a \leq b$ следует $a' \geq b'$
  - Ортомодулярность: если $a \leq b$, то $a \oplus (a \oplus b')' = b$
- Закон сокращения: Если $a \oplus b = a \oplus c$, то $b = c$.
- $a \perp 0$ и $a \oplus 0 = a$
- если $a \oplus b = 0$, то $a = 0$ и $b = 0$.

# Примеры алгебр эффектов

Оказывается простанства высказываний являются алгебрами эффектов. Так, в случае чётких теорий:

**Булевы алгебры**

$a \perp b$ если $a \wedge b = 0$, тогда $a \oplus b = a \vee b$. Аксиомы алгебры эффектов выполняются. С другой стороны, алгебра эффектов является булевой, если

(1) Если $a, b, c$ попарно ортогональны, то $(a \oplus b) \perp c$.

(2) Для любых $a, b$ существует $c$, такой что $a = a_0 \oplus c$, $b = b_0 \oplus c$ и $a_0 \oplus c \oplus b_0$ определён.

Элемент алгебры эффектов $a$ называется чётким (sharp), если $a \wedge a' = 0$.

**Ортомодулярные решётки**

В ортомодулярной решётке положим $a \perp b$ если и только если $a \leq b^{\perp}$, тогда $a \oplus b = a \wedge b$. С другой стороны, в любой алгебре эффектов семейство чётких элементов образует ортомодулярную решётку.

# Выпуклые алгебры эффектов

В случае вероятностных теорий разумно ввести действие $[0,1]$ на $E$.

Алгебра эффектов $E$ называется выпуклой, если задано действие $[0,1]$ и выполнено

(1) $\mu(\lambda a) = (\mu\lambda)a$

(2) Если $\lambda + \mu \leq 1$, то $\lambda a \perp \mu a$ и $\lambda a + \mu a = (\lambda + \mu)a$

(3) Если $a \perp b$, то $\lambda a \perp \lambda b$ и $\lambda a + \lambda b = \lambda(a + b)$

(4) $1a = a$.

Тогда если $\lambda + \mu \leq 1$, то $\lambda a \perp \mu b$.

Морфизм $\phi : E_1 \to E_2$ называется афинным, если $\phi(\lambda a) = \lambda\phi(a)$. В частности, $\phi(\lambda a \oplus \mu b) = \lambda\phi(a) \oplus \mu\phi(b)$.

Выпуклая алгебра эффектов архимедова, если $a \perp b$ и $c \leq a \oplus \frac{1}{n}b$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $c \leq a$.

# Теорема о представлении

**Линейные алгебры эффектов**

Если задано упорядоченное векторное пространство $V$ с единицей 1.

Множество $\{ v \in V \mid 0 \leq v \leq 1 \}$ обладает естественной структурой алгебры эффектов: $a \perp b$ если $a + b \leq 1$ и $a \oplus b = a + b$. Оказывается, все выпуклые алгебры эффектов имеют такой вид.

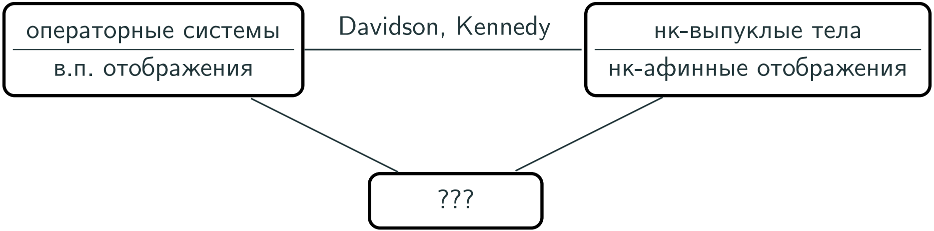
**Theorem**

*Gudder, Pulmannova, 1998 Если $E$ – выпуклая алгебра эффектов, то она афинно изоморфна линейной алгебре эффектов для некоторого $V$. При этом $V$ имеет архимедову единицу тогда и только тогда, когда $E$ архимедово.*

# Вполне упорядоченные обобщённые вероятностные теории ?

Чтобы обобщённые вероятностные теории включали в себя квантовую механику, необходимо усилить их структуру – ввести аналог топологий (матричный порядок).

Davidson K. R., Kennedy M. *Noncommutative choquet theory* arXiv:1905.08436 (2019).




**Открытая задача**

Как правильно ввести на алгебрах эффектов матричный порядок?

Что правильно называть вполне положительными морфизмами алгебр эффектов?

Спасибо за внимание!