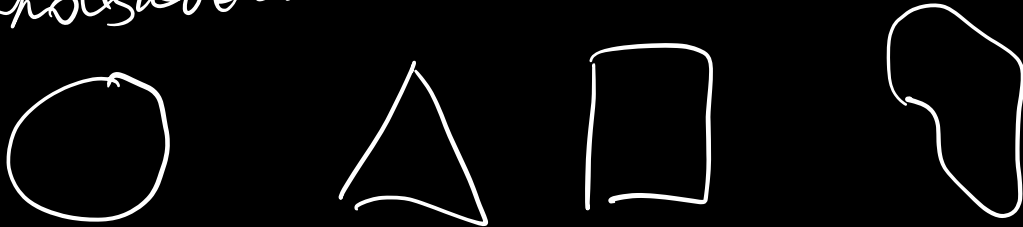


Геометрические оптимальные
собственные значения $\Delta \dots$

Лорд Рэлей Rayleigh

1877-78 Теория колебаний

Задача о колебаниях с различными формами
мембран с одинаковыми
плотностями



Какой из данных колебаний
самый низкий звук?

$$\Omega \mapsto \begin{cases} \Delta \psi = \lambda \psi & \text{в } \Omega \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0 & (D) \end{cases}$$

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots$$

$$\int_{\Omega} \lambda_1(\Omega)$$

$$\text{Area}(\Omega) = 1$$

Ейлер: Диск

Падер, Крэн

≈ 1921

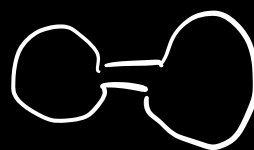
(k)

$$\int_{\Omega} \lambda_k(\Omega)$$

($\mathbb{R}^n$)

$$\text{Vol}(\Omega) = 1$$

λ_2 Ceré



(M, g)

$$g \mapsto \Delta_g f = -\text{div}_g \text{grad}_g f$$

$$\Delta_{\text{eukl}} = -\frac{\partial^2}{\partial x^1{}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x^n{}^2} \quad \text{в } \mathbb{R}^n$$

M Kommanovo $\delta \epsilon$ крсе

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \dots$$

свойства гравитации

(M) (k)

$$\sup_g \lambda_k(g)$$

$$\text{Vol}(M, g) = 1$$

$$H^1(M, g)$$

$$\lambda_k(g) = \inf_{\substack{E_k \subset H^1 \\ \dim E_k = k}} \sup_{\sigma \in E_k} R[\sigma]$$

$$R[\sigma] = \frac{\int_M |\nabla \sigma|_g^2 d\text{Vol}_g}{\int_M \sigma^2 d\text{Vol}_g}$$

① Если $\dim M \geq 3$, то $\sup = +\infty$

② Если $\dim M = 2$, то $\sup < +\infty$

g метрика

$$[g] = \{ e^f g \mid f \in C^\infty(M) \}$$

комп. класс g

в разн. ≥ 3

$$\sup_{g \in [g_0]} \lambda_k(g) < +\infty$$

$$g \in [g_0]$$

$$\text{Vol}(M, g) = 1$$

$$\bar{\lambda}_k(M, g) = \lambda_k(M, g) \text{Vol}(M, g)^{2/\dim M}$$

k -е собствен. значение лапласиана Шварца

$$\bar{\lambda}_k(M, Cg) = \bar{\lambda}_k(M, g)$$

$$\sup_g \bar{\lambda}_k(M, g)$$

Опр g_0 - максимизирующая метрика $\bar{\lambda}_k$, т.е.

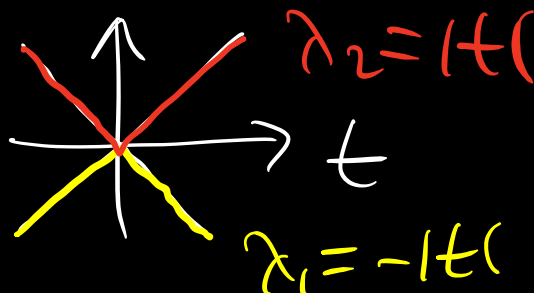
$$\lim_{g \rightarrow g_0} \lambda_k(g) = \lambda_k(g_0)$$

$$(\mathbb{M}) \quad (\mathbb{k}) \quad g \mapsto \bar{\lambda}_k(g)$$

непрерывен но не дифференцируем

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2$$



Для асимптотической вершины $g \in$
 $\exists$ кривая γ такая что $\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{d}{dt} \bar{\lambda}_k(g_t)$

Def метрика g_0 — экстремальная для $\bar{\lambda}_k$, если $\forall$ асимптотической вершины $g \in$

$$\frac{d}{dt} \lambda(g_t) \cdot \frac{d}{dt} |\lambda(g_t)| \leq 0.$$

$$\Sigma \subset \mathbb{R}^n \quad x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$$

$$\underline{\text{Th}} \quad \Sigma\text{-минимальное} \Leftrightarrow \forall i \quad \Delta^\Sigma x^i|_\Sigma = 0$$

водит к $\mathbb{R}^n$

Теорема (Такахаши ≈ 1969)

$$\Sigma\text{-минимальное} \Leftrightarrow \text{в } S_R^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, \text{ то}$$

$$\forall i \quad \Delta^\Sigma x^i|_\Sigma = \lambda x^i|_\Sigma$$

$$\lambda = \lambda(\dim \Sigma, R)$$

$$\frac{\dim \Sigma}{R^2} ?$$

$$\lambda \quad \Delta^\Sigma f_i = \lambda f^i \quad \text{в } (\Sigma, g), \quad i=1, \dots, n$$

$$F = (f_1, \dots, f_n): \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad g = F^* g_{S^n}$$

$$1) \quad f(\Sigma) \subset S_R^n \quad 2) \quad \text{минимальное}$$

выпуклое

Теорема (Награвинский, Эль Серги
и Умас)

Экстремальные метрики - это в
точности метрики, индуцированные
минимальными порождающими
в $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

$$N(\lambda) = \#\{\lambda_i \mid \lambda_i < \lambda\}$$

$$g = F^* g_{S^n} \quad \text{Экстремальные } \partial \Omega$$

$$\overline{\lambda_{N(2)}}.$$

1) найти все минимальные
породки в S^n

2) найти среди них $N(2)$

3) найти среди них максимальную

M , ϕ -многоугольник ρ -огр. δ

$$\bar{\lambda}_1 \leq 8\pi \left[\frac{\delta + 3}{2} \right] \quad g_{L2}, J_y$$

ϕ -многоугольник

$$\bar{\lambda}_1 \leq 16\pi \left[\frac{\delta + 3}{2} \right] \quad \text{Казимирский}$$

$$\bar{\lambda}_k \leq C k(\delta + 1)$$

$$\bar{\lambda}_k \leq 8\pi k(\delta + 1) \quad \text{КНПН}$$

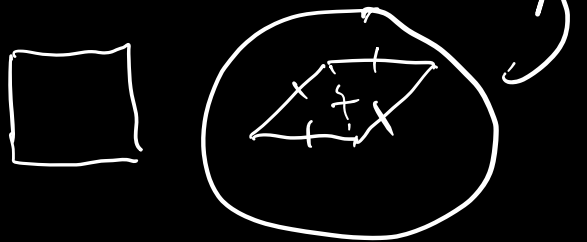
$$\Lambda_k(M) = \sup_{g \in M} \bar{\lambda}_k(g)$$

$$\text{Херм (1970)} \quad \Lambda_1(S^2) = 8\pi$$

$$\Lambda_1(\mathbb{R}P^2) = 12\pi$$

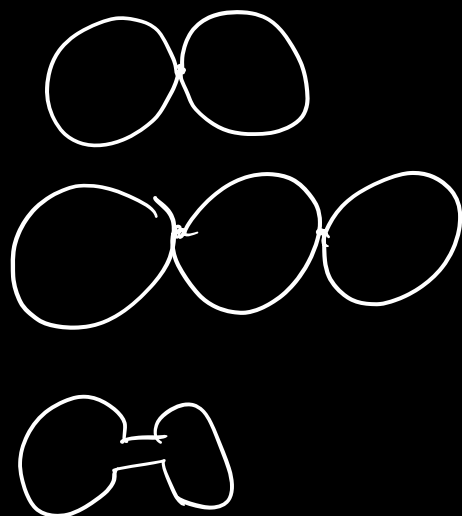
$\boxed{g_{can}}$
 g_{can}

Нагурскин (1996) $\Lambda_1(\pi^2) = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}}$



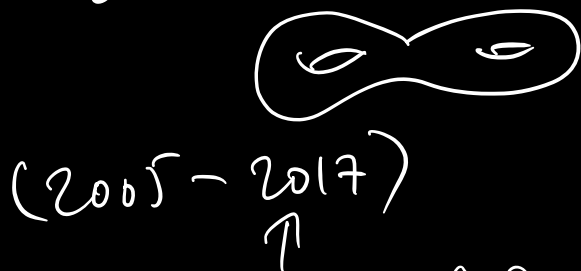
..... (2006-2015) $\Lambda_1(KL) = 12\pi E(\frac{2\sqrt{2}}{3})$
 $\approx \tilde{L}_{3,1}$

Нагурскин, + Сер
 $\Lambda_2(S^2)$ $\Lambda_3(S^2)$
 16π 24π



Σ_2 поверхность рода 2

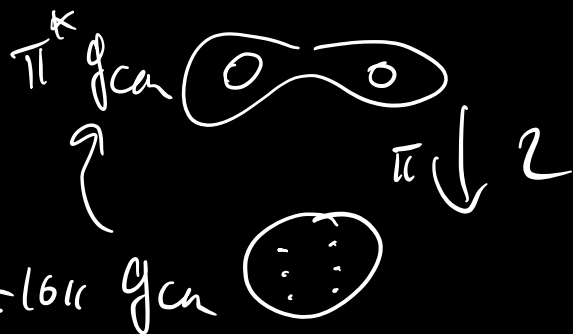
поверхность Борсука



(2005-2017)
 $\uparrow$

Калтанн, Сидда

$\Lambda_1(\Sigma_2) = 16\pi$



$$S^2 \quad \Lambda_k(S^2) = 8\pi k$$

$$KH\pi\pi \quad \underbrace{\bigcirc \dots \bigcirc}_k$$

$$\mathbb{R}P^2 \quad \Lambda_k(\mathbb{R}P^2) = 4\pi(2k+1)$$

$$\text{Кривые} \quad \underbrace{\overset{3}{\curvearrowright} \overset{2}{\curvearrowright} \dots \bigcirc}_{k\text{-сфера}}$$

$$1) \text{ надо } \Lambda_k(S^2) > 8\pi k$$

$$2) \text{ если есть последовательность} \\ \text{мгн } g_i \text{ т.ч. } \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\Lambda}_k(g_i) =$$

$$= \Lambda_k(S^2) > 8\pi k, \text{ то} \\ \text{есть предельное мгн } g_0$$

$$\Lambda_K(S^2) = \overline{\Lambda}_K(g_0)$$

то есть это минимальное значение

3) $\exists$ минимальное накрытие
 $f: S^2 \rightarrow S^2$ т.ч.

$$g_0 = f^* g_{S^2}$$

4) на S^2 есть ровно один
 непрерывный несе метрик,

поэтому для $S^2 \rightarrow S^2$

минимальность = равномерность

5) Канада, Барбоса... $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Теорема равномерных
 отображений $f: S^2 \rightarrow S^2$

$$\text{Area}(S^2, f^* g_{S^2}) = 4\pi d$$

$\uparrow$
 равномерное
 отображение f

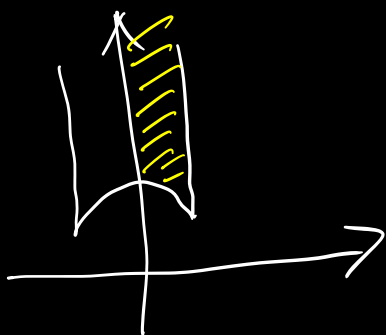
6) Эгзур

из регулярных Эгзур,

обозначено d и $N(2)$

среди, ∞ $\overline{N}_k(g_0) < 8\pi k$

гипотезе



JDG 2021 118(2)

313-333

Inv. Math 2021 (223)

335-377