

Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 14.

Теретёнков Александр Евгеньевич

2 мая 2022 г.

Квантовое уравнение Больцмана

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}\rho_t$$

$$\mathcal{L}[\sigma](\rho) = -i[h + H[\sigma], \rho] + \text{Tr}_2 K(\rho \otimes \sigma)$$

$$H[\sigma] = \text{Tr}_2 B(I \otimes \sigma)$$

$$K(\gamma) = \sum_{\alpha} \left(T_{\alpha} \gamma T_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ T_{\alpha}^{\dagger} T_{\alpha}, \gamma \} \right)$$

Квантовое уравнение Больцмана

При этом считается что выполнены условия:

- 1 Сохранения энергии

$$[B, h \otimes I + I \otimes h] = 0, \quad [T_\alpha, h \otimes I + I \otimes h] = 0$$

- 2 Микрообратимости

$$[T_\alpha^\dagger, T_\alpha] = 0$$

- 3 Инвариантности относительно перестановк

$$[B, P_{12}] = 0, \quad [T_\alpha, P_{12}] = 0$$

Оператор перестановки определён в базисе как

$$P_{12}|i\rangle \otimes |j\rangle = |j\rangle \otimes |i\rangle$$

Квантовое уравнение Больцмана

Утверждение. Пусть $E_t = \text{Tr } h \rho_t$, тогда $E_t = \text{const.}$

Доказательство:

$$\frac{d}{dt} E_t = \text{Tr} \left(h \frac{d}{dt} \rho_t \right) = -i \text{Tr}_1 (h [h + H[\rho_t], \rho_t]) + \text{Tr}_1 (h \text{Tr}_2 K(\rho_t \otimes \rho_t))$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_1 \rho_t h \text{Tr}_2 B(I \otimes \rho_t) &= \text{Tr}(\rho_t \otimes I)(h \otimes I)B(I \otimes \rho_t) = \\ &= \text{Tr}(h \otimes I)B\rho_t \otimes \rho_t = \text{Tr } P_{12}(h \otimes I)B\rho_t \otimes \rho_t P_{12} = \\ &= \text{Tr}(I \otimes h)B\rho_t \otimes \rho_t = \frac{1}{2} \text{Tr}(I \otimes h + h \otimes I)B\rho_t \otimes \rho_t \end{aligned}$$

$$\text{Tr}_1 h \rho_t \text{Tr}_2 B(I \otimes \rho_t) = \text{Tr } B(h \otimes I) \rho_t \otimes \rho_t = \frac{1}{2} \text{Tr } B(I \otimes h + h \otimes I) \rho_t \otimes \rho_t$$

Квантовое уравнение Больцмана

$$\mathrm{Tr}_1(h[H[\rho_t], \rho_t]) = \mathrm{Tr}_1[h, \rho_t]H[\rho_t] = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}[I \otimes h + h \otimes I, B]\rho_t \otimes \rho_t = 0$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tr}(h \otimes I) \left(T_\alpha \rho_t \otimes \rho_t T_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} \{T_\alpha^\dagger T_\alpha, \rho_t \otimes \rho_t\} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(h \otimes I + I \otimes h) \left(T_\alpha \rho_t \otimes \rho_t T_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} \{T_\alpha^\dagger T_\alpha, \rho_t \otimes \rho_t\} \right) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{d}{dt} E_t = 0$.



Квантовое уравнение Больцмана

Лемма.

$$\mathrm{Tr} \left(e^{R_t} \left(\frac{d}{dt} R_t \right) \right) = \frac{d}{dt} \mathrm{Tr} e^{R_t}$$

В частности, если $\gamma_t > 0$ — матрица плотности, то

$$\frac{d}{dt} S(\gamma_t) = - \mathrm{Tr} \left(\frac{d}{dt} \gamma_t \right) \ln \gamma_t$$

Квантовое уравнение Больцмана

Доказательство:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \text{Tr} e^{R_t} &= \text{Tr} \frac{d}{dt} e^{R_t} = \int_0^1 ds \text{Tr} \left(e^{(1-s)R_t} \left(\frac{d}{dt} R_t \right) e^{sR_t} \right) = \\ &= \text{Tr} \left(e^{R_t} \left(\frac{d}{dt} R_t \right) \right)\end{aligned}$$

Если положить $\gamma_t \equiv e^{R_t}$, где γ_t — матрица плотности, то

$$\text{Tr} \gamma_t \frac{d}{dt} \ln \gamma_t = \frac{d}{dt} \text{Tr} \gamma_t = 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} S(\gamma_t) &= -\frac{d}{dt} \text{Tr} \gamma_t \ln \gamma_t = -\text{Tr} \left(\frac{d}{dt} \gamma_t \right) \ln \gamma_t - \text{Tr} \gamma_t \left(\frac{d}{dt} \ln \gamma_t \right) = \\ &= -\text{Tr} \left(\frac{d}{dt} \gamma_t \right) \ln \gamma_t \quad \square\end{aligned}$$

Квантовое уравнение Больцмана

Лемма. Пусть K — ГКСЛ генератор вида

$$K(\gamma) = \sum_{\alpha} \left(T_{\alpha} \gamma T_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ T_{\alpha}^{\dagger} T_{\alpha}, \gamma \} \right),$$

где $[T_{\alpha}^{\dagger}, T_{\alpha}] = 0$, то

$$- \operatorname{Tr} K(\gamma) \ln \gamma \geq 0$$

Квантовое уравнение Больцмана

Доказательство: Так как

$$K(I) = \sum_{\alpha} [T_{\alpha}, T_{\alpha}^{\dagger}] = 0,$$

то K — генератор бистохастической полугруппы. Рассмотрим уравнение ГКСЛ

$$\frac{d}{dt}\gamma_t = K(\gamma_t),$$

тогда

$$\frac{d}{dt}S(\gamma_t) = -\text{Tr } K(\gamma_t) \ln \gamma_t \geq 0.$$

Используя данное выражение при $t = 0$, положив $\gamma_0 = \gamma$, получаем требуемое. □

Квантовое уравнение Больцмана

Утверждение. Пусть ρ_t удовлетворяет квантовому уравнению Больцмана

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}\rho_t,$$

тогда

$$\frac{d}{dt}S(\rho_t) \geq 0$$

Квантовое уравнение Больцмана

Доказательство:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S(\rho_t) &= -\operatorname{Tr}\left(\frac{d}{dt}\rho_t\right)\ln\rho_t = \\ &= i\operatorname{Tr}([h + H[\rho_t], \rho_t]\ln\rho_t) - \operatorname{Tr}_1(\operatorname{Tr}_2 K(\rho_t \otimes \rho_t))\ln\rho_t\end{aligned}$$

В силу циклического свойства следа первый член обнуляется

$$\operatorname{Tr}([h + H[\rho_t], \rho_t]\ln\rho_t) = 0$$

Второй член можно преобразовать

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}_1(\operatorname{Tr}_2 K(\rho_t \otimes \rho_t))\ln\rho_t &= \operatorname{Tr} K(\rho_t \otimes \rho_t)(\ln\rho_t \otimes I) = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(K(\rho_t \otimes \rho_t))(\ln\rho_t \otimes I + I \otimes \ln\rho_t) = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(K(\rho_t \otimes \rho_t))\ln(\rho_t \otimes \rho_t)\end{aligned}$$

С учётом леммы получаем требуемое.

Квантовое уравнение Больцмана

Лемма.

$$\mathrm{Tr}_2 B(I \otimes \sigma) = \mathrm{Tr}_2 (I \otimes \sigma) B$$

Квантовое уравнение Больцмана

Лемма.

$$\mathrm{Tr}_2 B(I \otimes \sigma) = \mathrm{Tr}_2 (I \otimes \sigma) B$$

Утверждение. Распределения Гиббса

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta h}}{\mathrm{Tr} e^{-\beta h}}$$

являются стационарными состояниями.

Квантовое уравнение Больцмана

Доказательство:

$$[T_\alpha, h \otimes I + I \otimes h] = 0$$

С учётом $e^{-\beta(h \otimes I + I \otimes h)} = e^{-\beta h} \otimes e^{-\beta h}$, получим

$$[T_\alpha, \rho_\beta \otimes \rho_\beta] = 0$$

$$\begin{aligned} K(\rho_\beta \otimes \rho_\beta) &= \sum_{\alpha} \left(T_\alpha \rho_\beta \otimes \rho_\beta T_\alpha^\dagger - \frac{1}{2} \{ T_\alpha^\dagger T_\alpha, \rho_\beta \otimes \rho_\beta \} \right) = \\ &= \sum_{\alpha} [T_\alpha, T_\alpha^\dagger] \rho_\beta \otimes \rho_\beta = 0 \end{aligned}$$

Квантовое уравнение Больцмана

$$\begin{aligned} H[\rho_\beta]\rho_\beta &= \text{Tr}_2 B(I \otimes \rho_\beta)(\rho_\beta \otimes I) = \text{Tr}_2 B(\rho_\beta \otimes \rho_\beta) = \\ &= \text{Tr}_2(\rho_\beta \otimes \rho_\beta)B = \rho_\beta \text{Tr}_2(I \otimes \rho_\beta)B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [H[\rho_\beta], \rho_\beta] &= \text{Tr}_2 B(I \otimes \rho_\beta)(\rho_\beta \otimes I) - \text{Tr}_2(\rho_\beta \otimes I)(I \otimes \rho_\beta)B = \\ &= \text{Tr}_2[B, \rho_\beta \otimes \rho_\beta] = 0 \end{aligned}$$



Приближение среднего поля и уравнение Хартри для матрицы плотности

Уравнение Хартри для матрицы плотности в $\mathcal{H}$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[h, \rho(t)] - i \text{Tr}_2[V_{12} + V_{21}, \rho(t) \otimes \rho(t)]$$

Приближение среднего поля и уравнение Хартри для матрицы плотности

Уравнение Хартри для матрицы плотности в $\mathcal{H}$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[h, \rho(t)] - i \operatorname{Tr}_2[V_{12} + V_{21}, \rho(t) \otimes \rho(t)]$$

Утверждение. Уравнение Хартри также можно переписать как

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[h + V_H(\rho(t)), \rho(t)],$$

где введён потенциал Хартри

$$V_H(\rho) \equiv \operatorname{Tr}_2(V_{12} + V_{21})(I \otimes \rho) = \operatorname{Tr}_2(I \otimes \rho)(V_{12} + V_{21}).$$

Приближение среднего поля и уравнение Хартри для матрицы плотности

Уравнение Хартри для матрицы плотности в $\mathcal{H}$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[h, \rho(t)] - i \text{Tr}_2[V_{12} + V_{21}, \rho(t) \otimes \rho(t)]$$

Утверждение. Уравнение Хартри также можно переписать как

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[h + V_H(\rho(t)), \rho(t)],$$

где введён потенциал Хартри

$$V_H(\rho) \equiv \text{Tr}_2(V_{12} + V_{21})(I \otimes \rho) = \text{Tr}_2(I \otimes \rho)(V_{12} + V_{21}).$$

Доказательство: $[V_H(\rho), \rho] = [\text{Tr}_2(V_{12} + V_{21})(I \otimes \rho), \rho] =$
 $= \text{Tr}_2((V_{12} + V_{21})(I \otimes \rho)(\rho \otimes I)) - \text{Tr}_2((\rho \otimes I)(I \otimes \rho)(V_{12} + V_{21})) =$
 $= \text{Tr}_2[V_{12} + V_{21}, \rho \otimes \rho].$ □

Приближение среднего поля и уравнение Хартри для матрицы плотности

Уравнение Хартри получается из N -частичного уравнения Лиувилля-фон Неймана в $\mathcal{H}^{\otimes N}$

$$\frac{d}{dt}\rho_N(t) = -i[H_N, \rho_N(t)], \quad H_N = \sum_j h_j + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

$$h_j = \underbrace{I \otimes \dots \otimes I}_{j-1} \otimes h \otimes I \otimes \dots \otimes I, \quad h \in \mathcal{H}$$

V_{ij} — тоже подразумевает, что оператор нетривиально действует в i -м и j -м пространствах.

Приближение среднего поля (приближение Хартри)

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Tr}_{n+1, \dots, N} \rho_N(t) = \otimes_1^n \rho(t)$$

Приближение среднего поля и уравнение Хартри для матрицы плотности

Доказательство: $n = 1$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Tr}_{2,\dots,N} \rho_N(t) = \rho(t)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Tr}_{2,\dots,N} \rho_N(t)}_{=\rho(t)} = -i \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Tr}_{2,\dots,N} [H_N, \rho_N(t)]$$

Приближение среднего поля и уравнение Хартри для матрицы плотности

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Tr}_{2,\dots,N} \left[\sum_{j=1}^N h_j, \rho_N(t) \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left([h, \text{Tr}_{2,\dots,N} \rho_N(t)] + \text{Tr}_{2,\dots,N} \left[\sum_{j=2}^N h_j, \rho_N(t) \right] \right) = [h, \rho], \end{aligned}$$

где учтено

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} [h, \text{Tr}_{2,\dots,N} \rho_N(t)] = [h, \rho], \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Tr}_j [h_j, \rho_N] = 0$$

Приближение среднего поля и уравнение Хартри для матрицы плотности

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Tr}_{2,\dots,N} \left[\frac{1}{N} \sum_{i \neq j} V_{ij}, \rho_N(t) \right] = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \text{Tr}_{2,\dots,N} \left[\sum_j (V_{1j} + V_{j1}), \rho_N(t) \right] = \end{aligned}$$

в силу симметрии

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N-1}{N} \text{Tr}_{2,\dots,N} [V_{12} + V_{21}, \rho_N(t)] = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Tr}_2 [V_{12} + V_{21}, \text{Tr}_{3,\dots,N} \rho_N(t)] = \\ &= [V_{12} + V_{21}, \rho(t) \otimes \rho(t)] \end{aligned}$$

Приближение среднего поля и нелинейное уравнение Шрёдингера

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[h + V_H(\rho_t) + V_D(\rho_t), \rho_t]$$

Потенциал Хартри

$$V_H(\rho) = \text{Tr}_2(V_{12} + V_{21})(I \otimes \rho)$$

Потенциал коллективных диссипативных процессов

$$V_D(\rho) = \frac{i}{2} \sum_{\alpha} (\text{Tr}((V^{\alpha})^{\dagger} \rho) V^{\alpha} - \text{Tr}(V^{\alpha} \rho) (V^{\alpha})^{\dagger})$$

Приближение среднего поля и нелинейное уравнение Шрёдингера

Для чистых состояний

$$\rho_t = |\psi_t\rangle\langle\psi_t|$$

получаем нелинейное уравнение Шрёдингера

$$\frac{d}{dt}|\psi_t\rangle = -i(h + V_H(\psi_t) + V_D(\psi_t))|\psi_t\rangle$$

$$V_H(\psi) = \langle\psi|(V_{12} + V_{21})|\psi\rangle$$

$$V_D(\psi) = \frac{i}{2} \sum_{\alpha} (\langle\psi|(V^{\alpha})^{\dagger}|\psi\rangle V^{\alpha} - \langle\psi|V^{\alpha}|\psi\rangle (V^{\alpha})^{\dagger})$$

Приближение среднего поля и нелинейное уравнение Шрёдингера

Доказательство:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_t &= \left(\frac{d}{dt}|\psi_t\rangle\right)\langle\psi_t| + |\psi_t\rangle\left(\frac{d}{dt}\langle\psi_t|\right) = \\ &= -i(h + V_H(\psi_t) + V_D(\psi_t))|\psi_t\rangle\langle\psi_t| + i|\psi_t\rangle(h + V_H(\psi_t) + V_D(\psi_t)) = \\ &= -i[h + V_H(\psi_t) + V_D(\psi_t), \rho_t]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_H(\psi) &= \langle\psi|(V_{12} + V_{21})|\psi\rangle = \text{Tr}_2(V_{12} + V_{21})I \otimes |\psi\rangle\langle\psi| = \\ &= \text{Tr}_2(V_{12} + V_{21})I \otimes \rho\end{aligned}$$

Приближение среднего поля и нелинейное уравнение Шрёдингера

$$\begin{aligned} V_D(\psi) &= \frac{i}{2} \sum_{\alpha} (\langle \psi | (V^{\alpha})^{\dagger} | \psi \rangle V^{\alpha} - \langle \psi | V^{\alpha} | \psi \rangle (V^{\alpha})^{\dagger}) = \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\alpha} (\text{Tr}((V^{\alpha})^{\dagger} |\psi\rangle\langle\psi|) V^{\alpha} - \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| V^{\alpha}) (V^{\alpha})^{\dagger}) = \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\alpha} (\text{Tr}((V^{\alpha})^{\dagger} \rho) V^{\alpha} - \text{Tr}(\rho V^{\alpha}) (V^{\alpha})^{\dagger}) \quad \square \end{aligned}$$

Приближение среднего поля и нелинейное уравнение Шрёдингера

Такое уравнение возникает в приближении среднего поля из линейного многочастичного уравнения $\mathcal{H}^{\otimes N}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_N(t) = & -i \left[\sum_j h_j + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} V_{ij}, \rho_N(t) \right] + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \left(W^{\alpha} \rho_N(t) (W^{\alpha})^{\dagger} - \frac{1}{2} \{ (W^{\alpha})^{\dagger} W^{\alpha}, \rho_N(t) \} \right), \end{aligned}$$

где $W^{\alpha} = \sum_i V_i^{\alpha}$ — коллективные операторы.

$$\rho(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{Tr}_{2, \dots, N} \rho_N(t)$$

Пример

$$\frac{d}{dt}\rho_N(t) = -i\omega[J^z, \rho_N(t)] + \underbrace{\gamma_0}_{\frac{1}{N}N\gamma_0} \left(J^- \rho_N(t) J^+ - \frac{1}{2}\{J^+ J^-, \rho_N(t)\} \right)$$

$$J^z = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \sigma_j^z, \quad J^\pm = \sum_{j=1}^N \sigma_j^\pm$$

Пример

$$\frac{d}{dt}\rho_N(t) = -i\omega[J^z, \rho_N(t)] + \underbrace{\gamma_0}_{\frac{1}{N}N\gamma_0} \left(J^- \rho_N(t) J^+ - \frac{1}{2}\{J^+ J^-, \rho_N(t)\} \right)$$

$$J^z = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}\sigma_j^z, \quad J^\pm = \sum_{j=1}^N \sigma_j^\pm$$

$$h = \frac{1}{2}\sigma^z, \quad V_H(\psi) = 0, \quad V_D(\psi) = \frac{iN\gamma_0}{2}(\langle\psi|\sigma^+|\psi\rangle\sigma^- - \langle\psi|\sigma^-|\psi\rangle\sigma^+)$$

Пример

$$\frac{d}{dt}\rho_N(t) = -i\omega[J^z, \rho_N(t)] + \underbrace{\gamma_0}_{\frac{1}{N}N\gamma_0} \left(J^- \rho_N(t) J^+ - \frac{1}{2}\{J^+ J^-, \rho_N(t)\} \right)$$

$$J^z = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \sigma_j^z, \quad J^\pm = \sum_{j=1}^N \sigma_j^\pm$$

$$h = \frac{1}{2} \sigma^z, \quad V_H(\psi) = 0, \quad V_D(\psi) = \frac{iN\gamma_0}{2} (\langle \psi | \sigma^+ | \psi \rangle \sigma^- - \langle \psi | \sigma^- | \psi \rangle \sigma^+)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle &= -i\frac{\omega}{2}\sigma^z|\psi(t)\rangle + \\ &+ \frac{N\gamma_0}{2} (\langle \psi(t) | \sigma^+ | \psi(t) \rangle \sigma^- - \langle \psi(t) | \sigma^- | \psi(t) \rangle \sigma^+) |\psi(t)\rangle \end{aligned}$$

Пример

Распишем покомпонентно

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi_1(t) &= -i\frac{\omega}{2}\psi_1(t) - \frac{N\gamma_0}{2}|\psi_2(t)|^2\psi_1(t) \\ \frac{d}{dt}\psi_2(t) &= i\frac{\omega}{2}\psi_2(t) + \frac{N\gamma_0}{2}|\psi_1(t)|^2\psi_2(t) \end{cases}$$

Сохраняется нормировка

$$|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2 = 1$$

Введём $p(t) = |\psi_1(t)|^2$, тогда

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \sqrt{p(t)}e^{i\theta(t)} \\ \psi_2(t) &= \sqrt{1-p(t)}e^{i\phi(t)} \end{aligned}$$

Пример

$$\frac{d}{dt}\psi_1(t) = \frac{d}{dt}(\sqrt{p(t)}e^{i\theta(t)}) = \sqrt{p(t)}e^{i\theta(t)} = \frac{1}{2}\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\psi_1(t) + i\dot{\theta}(t)\psi_1(t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\dot{p}(t)}{p(t)}\psi_1(t) + i\dot{\theta}(t)\psi_1(t) = -i\frac{\omega}{2}\psi_1(t) - \frac{N\gamma_0}{2}(1 - p(t))\psi_1(t)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} + i\dot{\theta}(t) = -i\frac{\omega}{2} - \frac{N\gamma_0}{2}(1 - p(t))$$

Приравнивая вещественные и мнимые части

$$\frac{1}{2}\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = -\frac{N\gamma_0}{2}(1 - p(t)), \quad \dot{\theta}(t) = -\frac{\omega}{2}$$

Пример

$$\frac{d}{dt}\psi_2(t) = \frac{d}{dt}(\sqrt{1-p(t)}e^{i\phi(t)}) = -\frac{1}{2}\frac{\dot{p}(t)}{1-p(t)}\psi_2(t) + i\dot{\phi}(t)\psi_2(t)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\dot{p}(t)}{1-p(t)}\psi_2(t) + i\dot{\phi}(t)\psi_2(t) = i\frac{\omega}{2}\psi_2(t) + \frac{N\gamma_0}{2}p(t)\psi_2(t)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\dot{p}(t)}{1-p(t)} + i\dot{\phi}(t) = i\frac{\omega}{2} + \frac{N\gamma_0}{2}p(t)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\dot{p}(t)}{1-p(t)} = \frac{N\gamma_0}{2}p(t), \quad \dot{\phi}(t) = \frac{\omega}{2}$$

Пример

Решения для фаз

$$\theta(t) = \theta(0) - \frac{\omega}{2}t, \quad \phi(t) = \phi(0) + \frac{\omega}{2}$$

— такие же, как при свободной эволюции.

Пример

$$\frac{dp(t)}{(1-p(t))p(t)} = -N\gamma_0 dt$$

$$\int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \right) dp = \ln p - \ln(1-p) = \ln \frac{p}{1-p}$$

$$\frac{p}{1-p} = \frac{p_D}{1-p_D} e^{-N\gamma_0(t-t_D)}$$

t_D — время задержки сверхизлучения: $p_D = \frac{1}{2}$.

$$p(t) = \frac{1}{e^{N\gamma_0(t-t_D)} + 1}$$

Пример

Среднее число атомов в возбуждённом состоянии $Np(t)$.
Интенсивность излучения

$$\begin{aligned} I(t) &= -N\omega \frac{d}{dt} p(t) = -N\omega \frac{d}{dt} \frac{1}{e^{N\gamma_0(t-t_D)} + 1} = \\ &= \frac{\gamma_0 \omega N^2}{4} \frac{1}{\text{ch}^2 \left(\frac{\gamma_0 N}{2} (t - t_D) \right)} \end{aligned}$$