К вопросу Бэйкера-Лэйдэкера о дизъюнктных семействах компактов в $\mathbb{R}^n$

Ольга Фролкина

12 мая 2022 г.

Семинар "Некоммутативная геометрия и топология". Москва, МГУ

Два вопроса

Пусть компакт $X \subset \mathbb{R}^N$. Существует ли несчетное семейство $\{X_\alpha\}$ попарно непересекающихся компактов с условием:

(A) гомеоморфность $X_\alpha \cong X$;

(B) эквивалентность = эквивалентно-вложенность = объемлемо-гомеоморфность $(\mathbb{R}^N, X_\alpha) \cong (\mathbb{R}^N, X)$.

Примеры (A)

(A1) Нет, если $X \subset \mathbb{R}^2$ — триод (R.L. Moore 1928).

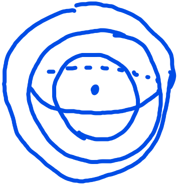
(A2) Нет, если $X \subset \mathbb{R}^3$ — лист Мебиуса (В.В.Грушин–В.П.Паламодов 1962 для полиэдральных листов, О.Д.Фролкина 2018 для произвольных листов. Общий многомерный случай — С.А.Мелихов 2018.)

(A3) для полного сепарабельного Y и компакта X имеем:
Y содержит несчетное дизъюнктное семейство компактов, гомеоморфных X
$\iff X \times \mathcal{C} \hookrightarrow Y$ (E.K. van Douwen 1993)
$\iff X \times \mathbb{Q} \hookrightarrow Y$ (S. Todorčević 1997).

Примеры (B)

(B1) $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

Всякое множество попарно непересекающихся *диких* замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ не более чем счетно (R.H. Bing 1957–1961).



Концентрич.

$X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \dots \quad X_\infty$

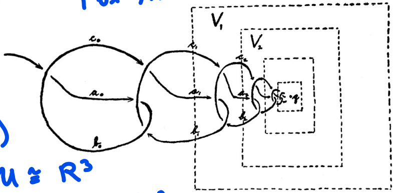
$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "1"] & X_2 \\ R^N \arrow[ur, "2"] & \end{tikzcd}$

Штанько, Щепин

Fox-Artin

$f_i : S^2 \hookrightarrow R^3$ руч

$f_i \to f : S^2 \hookrightarrow R^3$ дикое



1) $U \cong R^3$

$V \cong R^3 \setminus \{0\}$

откр

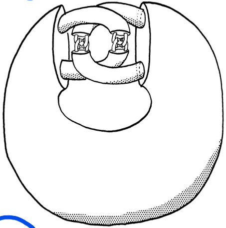
$S^N - \Sigma = U \cup V$

2) $\bar{U} \cong \bar{V} \cong D^N$

$\Rightarrow \Sigma$ ручная

S^{N-1}

S^N



ALEXANDER'S HORNED SPHERE

Definition

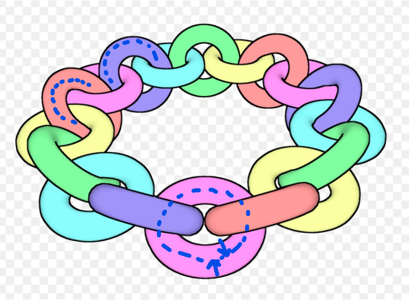
Множество $X \subset \mathbb{R}^N$, гомеоморфное $(N-1)$-сфере, называется плоским (или ручным), если $(\mathbb{R}^N, X) \cong (\mathbb{R}^N, S^{N-1})$. Иначе — диким.

Дикие $(N-1)$-сферы в $\mathbb{R}^N$ существуют при всех $N \geqslant 3$.
$N = 2$ — только ручные (теорема А.Шенфлиса).

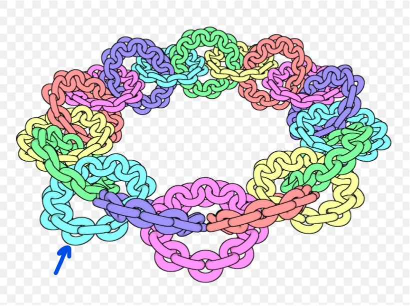
Definition

Множество $X \subset \mathbb{R}^N$, гомеоморфное канторову множеству, называется ручным, если $(\mathbb{R}^N, X) \cong (\mathbb{R}^N, \mathcal{C} \times \{0\}^{N-1})$. Иначе — диким.

Дикие канторовы множества в $\mathbb{R}^N$ существуют при всех $N \geqslant 3$.
$N = 2$ — только ручные (теорема Л.Антуана).



M_1

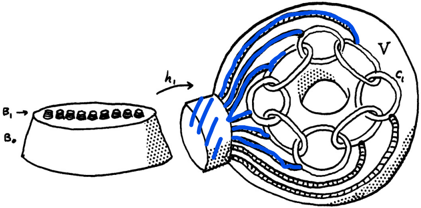


M_2

Wikipedia: Antoine's Necklace

$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots$

$\bigcap M_i =:$ ож. А. - канторово мн.



B₁
B₀
h₁
V
c₁

Примеры (B)

(B2) $S^{N-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$
При $N \geqslant 5$ всякое множество попарно непересекающихся *диких* $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$ не более чем счетно (J.L.Bryant 1968 + А.В.Чернавский 1973, R.J.Daverman 1973).

(B3) Нет, если $X \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 4$ — дикое канторово множество В.Крушкаля 2016 (О.Д.Фролкина 2022).

(B4) Да, если $X \subset \mathbb{R}^{2k+1}$ — k-мерный компакт, ручной по Штанько (B.J.Baker, M.Laidacker 1989)

Всякий k-мерный компакт вкладывается в $\mathbb{R}^{2k+1}$
(K. Menger–G. Nöbeling–L.S. Pontrjagin, G. Tolstowa–S. Lefschetz 1931).

вопрос B.J.Baker, M.Laidacker 1989

Что, если $X \subset \mathbb{R}^{2k+1}$ — k-мерный компакт, дикий по Штанько?

Definition (ручность произвольного компакта)

k-мерный компакт $X \subset \mathbb{R}^N$ называется ручным по Штанько, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая ε-псевдоизотопия $h_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ с носителем в $O_\varepsilon(X)$, что $h_1(X)$ является k-мерным полиэдром.

✓ $N \geqslant 4$, $k \in \{N-1, N-2\} \Rightarrow$ ручность по Штанько.
✓ $N = 3$ всякая дуга или узел является ручным по Штанько.
✓ Для канторовых множеств ручность = Ш-ручность.
✓ Если $k \leqslant N-3$ и X содержит дикое канторово множество, то X является Ш-диким.
✓ Для k-мерного полиэдра при $k \leqslant N-3$ ручность = Ш-ручности

R^3 типов узлов?   руч ($\cong$ замк. лом.) произв   счетное континуум

BL $\Rightarrow$ в R^3 можно разместить в узл всех типов одновременно

$\Downarrow$ в R^{2k+1} можно разм все k-компакты одновременно (но не всех типов вложений)

Theorem (М.А.Штанько 1969)

$X \subset \mathbb{R}^N$ является ручным по Штанько $\iff$ найдется такой гомеоморфизм $h : \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$, что $h(X) \subset M_N^k$.

Здесь $M_N^k \subset \mathbb{R}^N$ — компакт Менгера.

Этот результат М.А.Штанько получил, решая проблему Менгера: если $X \subset \mathbb{R}^N$ — k-мерный компакт, то существует вложение $X \hookrightarrow \boxed{M_N^k} \subset R^N$ [возможно, не эквивалентное первоначальному].

The first six steps of this process are illustrated below.

M_1^0

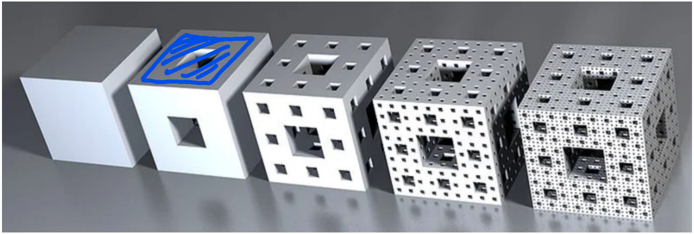
$\subset R^1$

M_2^1

$\dots \subset R^2$

X

M_3^1



$\subset R^3$

Five stages in the evolution of a Menger sponge. Credit: Niabot *Wikimedia* (CC BY 3.0)

$M_N^k \subset R^N$ $\quad I^N$

В стандартном кубе $I^N = [0,1]^N \subset \mathbb{R}^N$ пусть $\mathcal{T}_j$ — совокупность всех N-кубов, полученная делением I^N на 3^{jN} конгруэнтных N-кубиков гиперплоскостями, проведенными перпендикулярно ребрам I^N в точках, делящих ребра на три равные части. Компакт M_N^k строится индуктивно. Семейство $\mathcal{F}_0$ состоит из единственного элемента I^N. Семейство $\mathcal{F}_{j+1}$ состоит из всех $v \in \mathcal{T}_{j+1}$ со свойством: v является подмножеством некоторого элемента $w \in \mathcal{T}_j$ такое, что v пересекает некоторую k-грань w. Теперь пусть P_j — объединение всех элементов $\mathcal{F}_j$. *k-мерный компакт Менгера, построенный в $\mathbb{R}^N$* определяется как

$\dim M^k_N = k$

$$M_N^k = \bigcap_{j=0}^{\infty} P_j.$$

M^2_3

$M^1_3 \subset R^3$

1-мер. к-т $X \overset{\exists}{\hookrightarrow} R^3 \supset \boxed{M^1_3}$ 1-мер.

$X \xrightarrow[\text{усил.}]{\exists} M^1_3$

k R^{2k+1}

X полиэдр k $\hookrightarrow M^k_{2k+1}$

$X \hookrightarrow R^{2k+1} \supset M^k_{2k+1}$, $X \xrightarrow{f} M^k_{2k+1}$

Лефшец

k к-т $X \hookrightarrow R^{2k+1} \supset L^k_{2k+1} \cong M^k_{2k+1}$

B.J.Baker, M.Laidacker 1989: для $k \geqslant 0$ построили вложение $F : M^k_{2k+1} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^{2k+1}$ так, что все компакты $F(M^k_{2k+1} \times \{t\})$, где $t \in \mathcal{C}$, получаются друг из друга параллельными переносами.

Каждый $F(M^k_{2k+1} \times \{t\})$ вложен эквивалентно стандартному компакту Менгера $M^k_{2k+1} \subset \mathbb{R}^{2k+1}$.

$M^1_3 \times C \hookrightarrow R^3$

$M^1_3 \times \{t\}$ - пар. переносы

$X \subset M^k_{2k+1} \Rightarrow X \times C \subset M^k_{2k+1} \times C \subset R^{2k+1}$

$\{X \times \{t\}\},\ t \in C$

$X \subset R^N$

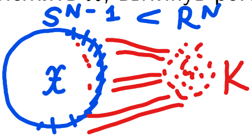
Ш - дикий

“Отрицательные” результаты

Theorem (Ф. 2022)

Пусть $N \geqslant 4$. Пусть $\mathfrak{X} \subset S^{N-1}$ — несчетный компакт, $\dim \mathfrak{X} \leqslant N-3$. *Тогда существует такое вложение $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^N$, что*
1) образ $X := f(\mathfrak{X})$ дикий по Штанько,
2) в $\mathbb{R}^N$ нельзя найти несчетное дизъюнктное семейство компактов, вложенных эквивалентно X.

Идея:
✓ $\mathfrak{X} \subset S^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$
✓ Рядом с S^{N-1} взять дикое канторово множество Крушкала K.
✓ Перевложить $\mathfrak{X}$, вытянув рога к множеству K.



$X = f\mathfrak{X} \supset K$

Theorem (Ф. 2022, напрямую выводится из H.G.Bothe 1964)

Существуют такие вложение $f : M^1_3 \to \mathbb{R}^3$ и замкнутая ломаная $L \subset \mathbb{R}^3$, что компакт $X = L \cup f(M^1_3)$ имеет следующие свойства:
1) X связен,
2) $\dim X = 1$,
3) X дикий по Штанько,
4) нельзя найти в $\mathbb{R}^3$ несчетное дизъюнктное семейство компактов, эквивалентных X.

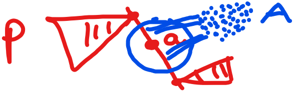
“Положительные” результаты

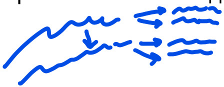
Theorem (Ф. 2022)

Пусть $N \geqslant 4$; $1 \leqslant k \leqslant N-3$; $2k+1 \leqslant N$. Пусть $P \subset \mathbb{R}^N$ — k-мерный полиэдр, причем для некоторой точки $a \in P$ его окрестность в P гомеоморфна интервалу $(0,1)$. Тогда существует вложение $\underline{F : P \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^N}$ со свойствами:
1) все компакты $F(P \times \{t\})$, где $t \in \mathcal{C}$, вложены в $\mathbb{R}^N$ эквивалентно друг другу, и
2) каждый из них дикий по Штанько. ✓

Идея: ? $P = I^k$

✓ Рядом с точкой a взять дикое канторово множество A типа ожерелья Антуана (А.А.Иванов 1950, W.Blankinship 1951).
✓ Перевложить P, вытянув рога к A.
✓ Для “размножения на континуум копий” применить теорию Штанько и идеи Робертса–Бинга.





Theorem (Ф. 2022)

Для любых $N \geqslant 3$ *и* $1 \leqslant k \leqslant N-3$ *существует такое вложение* $F : (I^k \times \mathcal{C}) \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}^N$, *что*
1) все компакты $F((I^k \times \mathcal{C}) \times \{t\})$, *для* $t \in \mathcal{C}$, *вложены в* $\mathbb{R}^N$ *эквивалентны друг другу, и*
2) каждый из них дикий по Штанько.

Идея:

$N-k \geqslant 3$

✓ $f : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{R}^{N-k}$, каждое $f(\mathcal{C} \times \{t\})$ — дикое канторово множество типа Антуана–Иванова–Бланкиншипа, и они попарно эквивалентны.

✓

$$F : I^k \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \stackrel{\mathrm{id} \times f}{\to} I^k \times \mathbb{R}^{N-k} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k} = \mathbb{R}^N.$$

k-мер $X \subset R^{2k+1}$

Ш-руч. Ш-дикий

BL '89 ∃ ∄

∃ несч. диз. $\{X_\alpha\}$,
экв-но X