О двух взаимодействующих квантовых гармонических осцилляторах

А.Е. Теретёнков

Рассматривается гамильтониан в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{m_1\omega_1^2 x_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_2\omega_2^2 x_2^2}{2} + \lambda x_1 x_2,$$

где

$$p_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad x_i = x_i \cdot, \qquad i = 1{,}2 \qquad (\hbar = 1).$$

Утверждение 0. $H > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\omega_1^2\omega_2^2 > \frac{\lambda^2}{m_1 m_2}$.

Тогда при $\omega_1^2\omega_2^2 > \frac{\lambda^2}{m_1 m_2}$ получим $Z = \operatorname{Tr} e^{-\beta H} < +\infty$ и корректно определено равновесное распределение $\rho = e^{-\beta H}/Z$.

Представим в виде

$$\beta H = \begin{pmatrix} x_1 & p_1 & x_2 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\frac{m_1\omega_1^2}{2} & 0 & \beta\frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{2m_1} & 0 & 0 \\ \beta\frac{\lambda}{2} & 0 & \beta\frac{m_2\omega_2^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta}{2m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = R\varepsilon R^T, \tag{1}$$

где

$$R^T = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1}x_1 \\ \frac{1}{\sqrt{m_1}}p_1 \\ \sqrt{m_2}x_2 \\ \frac{1}{\sqrt{m_2}}p_2 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{\lambda} & 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где в свою очередь

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{m_1 m_2}} \tag{2}$$

Матрица ковариаций

Определим вектор средних (в предположении их существования)

$$\mu = \operatorname{Tr} R\rho$$

(понимается как вектор-строка с элементам $\operatorname{Tr} R_i\rho$).

Введём также матрицу вторых центральных моментов как $\operatorname{Tr}(R-\mu)(R-\mu)^T\rho$ (также понимается как матрица с элементами $\operatorname{Tr}(R_i-\mu_i)(R_j-\mu_j)\rho$). В силу коммутационных соотношений его можно представить в виде

$$\operatorname{Tr}(R-\mu)^T(R-\mu)\rho = \alpha - \frac{i}{2}\Delta$$

где

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а $\alpha = \alpha^T$. Матрица α называется матрицей ковариаций.

Утверждение 1. *Если матрица плотности имеем вид $\rho = \frac{1}{Z}e^{-R\varepsilon R^T}$, то*

$$\alpha = \frac{1}{2}\Delta \coth\left(\varepsilon\Delta\right) \tag{4}$$

$$Z = \sqrt[4]{\det\left(-(\Delta^{-1}\alpha)^2 - \frac{1}{4}I_4\right)}$$

Следствие 1.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \tag{5}$$

где

$$\alpha_{11} = \frac{k_1\Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right) - k_2\Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right)}{2\Omega_1\Omega_2(k_1 - k_2)}, \qquad \alpha_{22} = \frac{k_1\Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right) - k_2\Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right)}{2(k_1 - k_2)} \tag{6}$$

$$\alpha_{33} = \frac{k_1\Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right) - k_2\Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right)}{2\Omega_1\Omega_2(k_1 - k_2)}, \qquad \alpha_{44} = \frac{k_1\Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right) - k_2\Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right)}{2(k_1 - k_2)} \tag{7}$$

$$\alpha_{13} = -\tilde{\lambda}\frac{\Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right) - \Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right)}{2\Omega_1\Omega_2(k_1 - k_2)}, \qquad \alpha_{24} = \tilde{\lambda}\frac{\Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right) - \Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right)}{2(k_1 - k_2)}, \tag{8}$$

где в свою очередь

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + \tilde{\lambda}^2}} \tag{9}$$

— собственные частоты осциллятора, и

$$k_{1,2} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + \tilde{\lambda}^2} \tag{10}$$

Кроме того,

$$Z = 4 \operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right)$$

Редуцированная матрица плотности

$\rho_{1,2} = \operatorname{Tr}_{2,1} \rho$

Утверждение 2. *Состояния ρ_1 и ρ_2 являются гауссовскими состояниями с нулевыми средними и матрицами ковариаций*

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Утверждение 3. *Если $2\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}} > 1$, то ρ_1 представимо в виде*

$$\rho_1 = \frac{e^{-R_1 \varepsilon_1 R_1^T}}{Z_1},$$

где

$$R_1^T = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} x_1 \\ \frac{1}{\sqrt{m_1}} p_1 \end{pmatrix},$$

ε_1 определяется

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \Delta_1 \coth\left(\varepsilon_1 \Delta_1\right), \tag{12}$$

а именно

$$\varepsilon_1 = \left(\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}} \operatorname{arcoth} 2\sqrt{\alpha_{11}\alpha_{22}}\right) \begin{pmatrix} \alpha_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha_{11}^{-1} \end{pmatrix},$$

$$Z_1 = \sqrt[4]{\det\left(-(\Delta_1^{-1}\alpha_1)^2 - \frac{1}{4} I_2\right)}$$

Следствие 2.

$$\rho_1 = \frac{e^{-\beta_1 H_1}}{Z_1}$$

где

$$H_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{m_1 \tilde{\omega}_1^2 x_1^2}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{2 \operatorname{arcoth} \sqrt{\eta_1}}{\tilde{\omega}_1}, \qquad \tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}}}$$

$$\eta_1 = 4\alpha_{11}\alpha_{22} = \frac{\left(k_2 \Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right) - k_1 \Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right)\right)\left(k_2 \Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right) - k_1 \Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right)\right)}{4\sqrt{\omega_1^2\omega_2^2 - \tilde{\lambda}^2}\left(\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + \tilde{\lambda}^2\right)}$$

и

$$Z_1 = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\beta_1}{2} \tilde{\omega}_1\right)$$

Замечание 1. Аналогично для второй подсистемы

$$\rho_2 = \frac{e^{-\beta_2 H_1}}{Z_2}$$

где

$$H_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_2 \tilde{\omega}_2^2 x_2^2}{2}$$

$$\beta_2 = \frac{2 \operatorname{arcoth} \sqrt{\eta_2}}{\tilde{\omega}_2}, \qquad \tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{44}}{\alpha_{33}}}$$

$$\eta_2 = \frac{\left(k_2 \Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right) - k_1 \Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right)\right)\left(k_2 \Omega_2 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right) - k_1 \Omega_1 \coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right)\right)}{4\sqrt{\omega_1^2 \omega_2^2 - \tilde{\lambda}^2}\left(\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2}\right)^2 + \tilde{\lambda}^2\right)}$$

$$Z_1 = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{\beta_1}{2}\tilde{\omega}_1\right)$$

Энтропия

$$S(\rho) = -\operatorname{Tr} \rho \ln \rho$$

Утверждение 4.

$$S(\rho_1) = \sigma(\eta_1), \qquad S(\rho_2) = \sigma(\eta_2) \tag{13}$$

$$S(\rho) = \sigma\left(\coth^2 \Omega_1 \frac{\beta}{2}\right) + \sigma\left(\coth^2 \Omega_2 \frac{\beta}{2}\right) \tag{14}$$

где

$$\sigma(\eta) = \frac{\sqrt{\eta}+1}{2} \ln \frac{\sqrt{\eta}+1}{2} - \frac{\sqrt{\eta}-1}{2} \ln \frac{\sqrt{\eta}-1}{2}$$

Замечание. При $\lambda = 0$ получим

$$\tilde{\lambda} = 0, \qquad \Omega_{1,2} = \omega_{1,2}, \qquad k_1 = \omega_1^2 - \omega_2^2, \qquad k_2 = 0 \tag{15}$$

следовательно

$$\eta_1 = \coth^2 \omega_1 \frac{\beta}{2}, \qquad \eta_2 = \coth^2 \omega_2 \frac{\beta}{2} \tag{16}$$

и

$$S(\rho) = S(\rho_1) + S(\rho_2) \tag{17}$$

чего и следовало ожидать от системы из двух невзаимодействующих осцилляторов.

Сцепленность

Утверждение 5. *Пусть* $\omega_1^2\omega_2^2 > \tilde{\lambda}^2 > 0$, *тогда* $\rho = e^{-\beta H}/Z$ *— сцеплено при* $\beta > \beta^*$ *и несцеплено в противном случае, где* β^* *— решение уравнения* $f(\beta^*) = 0$, *где*

$$f(\beta) = \frac{\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2}\right)^2}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right)\operatorname{sh}^2\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right)} + \tilde{\lambda}^2\left(\coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right)\coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right) - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right)\left(\coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_1\right)\coth\left(\frac{\beta}{2}\Omega_2\right) - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)$$

такое решение β^* *существует и единственно.*

Следствие 3. *При* $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, β^* *— решение уравнения*

$$\coth\left(\frac{\beta^*}{2}\sqrt{\omega+\tilde{\lambda}}\right)\coth\left(\frac{\beta^*}{2}\sqrt{\omega-\tilde{\lambda}}\right) = \sqrt{\frac{\omega+|\tilde{\lambda}|}{\omega-|\tilde{\lambda}|}}$$

Случай нулевой температуры полной системы

При $\beta \to +\infty$ (нулевой температуре)

$$\alpha_{11} = \frac{k_1\Omega_2 - k_2\Omega_1}{2\Omega_1\Omega_2(k_1-k_2)}, \qquad \alpha_{22} = \frac{k_1\Omega_1 - k_2\Omega_2}{2(k_1-k_2)} \tag{18}$$

$$\alpha_{33} = \frac{k_1\Omega_1 - k_2\Omega_2}{2\Omega_1\Omega_2(k_1-k_2)}, \qquad \alpha_{44} = \frac{k_1\Omega_2 - k_2\Omega_1}{2(k_1-k_2)} \tag{19}$$

$$\alpha_{13} = -\tilde{\lambda}\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2\Omega_1\Omega_2(k_1-k_2)}, \qquad \alpha_{24} = \tilde{\lambda}\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2(k_1-k_2)} \tag{20}$$

$$\eta_1 = \frac{(k_2\Omega_1 - k_1\Omega_2)(k_2\Omega_2 - k_1\Omega_1)}{4\sqrt{\omega_1^2\omega_2^2 - \tilde{\lambda}^2}\left(\left(\frac{\omega_1^2-\omega_2^2}{2}\right)^2 + \tilde{\lambda}^2\right)} = \eta_2 \tag{21}$$

и

$$S(\rho_2) = S(\rho_1) \tag{22}$$

таким образом, корректно определена энтропия сцепленности. Этого и следовало ожидать, так как при стремлении температуры к нулю ρ должно к чистому состоянию.

$$S(\rho) = \sigma(1) + \sigma(1) = 0 \tag{23}$$

В частности при $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, получим

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 - \tilde{\lambda}^2}} + 1\right)$$

$$\rho_i = \frac{e^{-\tilde{\beta} H_i}}{Z}$$

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m_i} + \frac{m_i \tilde{\omega}^2 x_i^2}{2}$$

$$\tilde{\omega}^2 = \sqrt{\omega^4 - \tilde{\lambda}^2}$$

$$\tilde{\beta} = \frac{2 \operatorname{arcoth} \sqrt{\eta}}{\tilde{\omega}} = \frac{2 \operatorname{arcoth} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 - \tilde{\lambda}^2}} + 1\right)}}{\sqrt[4]{\omega^4 - \tilde{\lambda}^2}}$$