

Проблема глобальной однозначной разрешимости уравнений Навье-Стокса: текущее положение дел

Тимофей Шилкин
ПОМИ РАН

19 мая 2022

- §1. Физические основы
- §2. Теория слабых решений
- §3. В поисках blow up

§1. Физические основы

1. Постановка задачи $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $Q_T := \Omega \times (0, T)$

• Дано: $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\nu > 0$

• Найти: $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^3$, $p : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$, такие что

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0 \quad \text{в } Q_T \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{в } Q_T \\ u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0, \quad u|_{t=0} = a \end{array} \right. \quad (\text{NS})$$

$$(u \cdot \nabla)u = u_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad \operatorname{div} u = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(u \otimes u) = (u \cdot \nabla)u$$

2. Откуда взялись такие уравнения?

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho dx = \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(u\rho) \right) dx, \quad \begin{array}{l} \rho = \text{const} \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array}$$

$$F_{\omega(t)} = \frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho u dx = \int_{\omega(t)} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) \right) dx, \quad \begin{array}{l} \rho (\partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u)) \\ = f + \operatorname{div} T \end{array}$$

3. Реологические соотношения

- $T = -p(x, t) \mathbb{I}$ — идеальная жидкость, $\nu = 0$,
- $T = -p(x, t) \mathbb{I} + \sigma$, $\sigma = 2\nu Du$ — ньютоновская жидкость
- $T = -p(x, t) \mathbb{I} + \sigma$, $\sigma = \sigma(Du, \dots)$ — неньютоновская жидкость

$$Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \implies \quad \operatorname{div} Du = \frac{1}{2}\Delta u$$

4. Какая разница между жидкостью и газом?

- газ: $\rho = \rho(x, t)$, $p = c\rho^\gamma$ $pV = \text{const}$ $\gamma = 1$
- жидкость: $\rho = \text{const}$, $p(x, t)$ — неизвестная функция

5. Проблема с выбором краевых условий

- $\nu > 0 \implies u|_{\partial\Omega} = 0$
- $\nu = 0 \implies u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, n — нормаль к $\partial\Omega$

6. Уравнение энергетического баланса $f \equiv 0$, $\text{NSE} \cdot u$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(x, \tau)|^2 dx d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |a(x)|^2 dx$$

$$\int_{\Omega} u \otimes v : \nabla u dx = \int_{\Omega} v \cdot \nabla \frac{1}{2}|u|^2 dx = 0$$

7. Уравнения Навье-Стокса в форме ротора

$$\omega = \operatorname{rot} u, \quad (u \cdot \nabla)u = \omega \times u + \frac{1}{2} \nabla |u|^2, \quad \nabla \times ((\nabla \times u) \times u) = \text{БАЦ-ЦАБ}$$

$$\partial_t \omega + (u \cdot \nabla) \omega - \nu \Delta \omega = (\omega \cdot \nabla) u \quad \text{в } Q_T$$

$$u = u(x_1, x_2, t), \quad u_3 = 0 \implies (\omega \cdot \nabla) u = 0$$

8. Чего ждать от уравнения с квадратичной нелинейностью?

$$\left. \begin{array}{l} y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = a \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} y(t) = \frac{1}{T_a - t} \\ T_a = 1/a \end{array} \right\} \implies y(t) \xrightarrow[t \rightarrow T_a]{} \infty$$

blow up!

Но в случае NSE есть закон сохранения!

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau = \frac{1}{2} \|a\|_{L_2(\Omega)}^2$$

9. Главный вопрос:

Адекватны ли уравнения Навье-Стокса
для описания течений вязкой жидкости?

§2. Теория слабых решений

1. Разложение Гельмгольца–Вейля

$$L_2(\Omega; \mathbb{R}^3) = H \oplus G, \quad \forall f \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^3) \quad f = u + \nabla \varphi$$

$$H := \text{Closure}_{L_2(\Omega)} \left\{ v \in C_0^\infty(\Omega) \mid \operatorname{div} v = 0 \right\}, \quad u \in H, \quad \varphi \in W_2^1(\Omega)$$

2. Оператор Стокса

$$\tilde{\Delta} : D_{\tilde{\Delta}} \subset H \rightarrow H, \quad \tilde{\Delta} = P_H \Delta \quad \text{— самосопряженный}$$

P_H — ортопроектор на H в $L_2(\Omega; \mathbb{R}^3)$

3. Приближенные решения

$a \in H, \quad u^m \in C^1(\bar{Q}_T)$ — “приближенные” решения NSE

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u^m(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u^m\|_{L_2(Q_T)} \leq c \|a\|_{L_2(\Omega)}$$

$$\left. \begin{array}{l} u^m \rightharpoonup u \quad \text{в } W_2^{1,0}(Q_T) \\ u^m \rightarrow u \quad \text{в } L_2(Q_T) \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} u \text{ — решение (NS)} \\ u \in L_{2,\infty}(Q_T) \cap W_2^{1,0}(Q_T) \end{array}$$

4. Глобальное существование слабых решений

Теорема. $a \in H - \forall, T > 0 - \forall \implies \exists u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^3$:

- $u \in L_\infty(0, T; H) \cap W_2^{1,0}(Q_T)$ — энергетический класс
- интегральное тождество для пробных $\eta \in C_0^\infty(Q_T)$: $\operatorname{div} \eta = 0$
- $\int_\Omega |u(x, t)|^2 dx + 2\nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla u(x, \tau)|^2 dx d\tau \leq \int_\Omega |a(x)|^2 dx, \quad \forall t \in (0, T)$

5. Оценки для разности двух решений

u_1 и u_2 — два решения, соответствующие $a \in H$, $u = u_2 - u_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= (u_2(t) \otimes u_2(t) - u_1(t) \otimes u_1(t), \nabla u(t)) \\ &= \underbrace{(u(t) \otimes u_2(t), \nabla u(t))}_{=0} + (u_1(t) \otimes u(t), \nabla u(t)) \end{aligned}$$

6. Неравенства О.А. Ладыженской

$$\forall w \in C_0^\infty(\Omega) \quad \|w\|_{L_4(\Omega)}^4 \leq \begin{cases} 2 \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^2, & n = 2 \\ 4 \|w\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^3, & n = 3 \end{cases}$$

7. Теорема единственности в 2D

$$\left| \left(u_1(t) \otimes u(t), \nabla u(t) \right) \right| \leq \|u_1(t)\|_{L_4(\Omega)} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{3}{2}}, \quad n = 2$$

$$y(t) := \|u_2(t) - u_1(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \implies y'(t) \leq c y(t) \|u_1(t)\|_{L_4(\Omega)}^4$$

8. “Weak-strong” теорема единственности в 3D

$$n = 3, \quad a \in H^1 = \{ v \in \mathring{W}_2^1(\Omega) : \operatorname{div} v = 0 \}$$

$\nabla u_1 \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$ — сильное решение в Q_T

u_2 — слабое решение в $Q_T \implies u_2 \equiv u_1$ в Q_T

9. Существование сильных решений

Теорема. $a \in H^1$

- $\|a\|_{H^1} \leq \varepsilon_0 \implies \forall T > 0 \quad \exists \text{ сильное реш. в } Q_T = \Omega \times (0, T)$
- $T_a = C(\Omega) \|\nabla a\|_{L_2(\Omega)}^{-4} \implies \exists \text{ сильное реш. в } Q_{T_a} = \Omega \times (0, T_a)$

10. Blow up time

Опр. Пусть $a \in H^1$, определим $T_* \in (0, +\infty]$

$$T_* := \sup \left\{ T > 0 \mid \exists u \text{ — сильное решение (NS) в } Q_T = \Omega \times (0, T) \right\}$$

Теорема. $T_* < +\infty \implies \|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)} \geq \frac{C(\Omega)^{1/4}}{(T_* - t)^{1/4}}, \quad \forall t \in (0, T)$

11. Условие Ладыженской-Проди-Серрина

$$u \in L_{s,l}(Q_T) \equiv L_l(0, T; L_s(\Omega)), \quad \frac{3}{s} + \frac{2}{l} = 1 \quad (\text{LPS})$$

Теорема. $a \in H^1$, u — решение Лере-Хопфа, удовл. (LPS)

$$y(t) := \|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \implies y(t) \leq y(0) \exp \left(c \|u\|_{L_{s,l}(Q_T)}^l \right)$$

12. “Зазор” между классами существования и единств—ти

$$\text{знаем: } u \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap W_2^{1,0}(Q_T) \implies u \in L_{\frac{10}{3}}(Q_T)$$

$$\text{ХОТИМ: } u \in L_{s,l}(Q_T), \quad \frac{3}{s} + \frac{2}{l} = 1, \quad s = l = 5 \implies u \in L_5(Q_T)$$

13. NSE Millennium Problem

В терминах blow up time $T_* = T_*(a)$:

- либо доказать, что для любого $a \in H^1$, $T_* = +\infty$
т.е. $\forall T < +\infty \exists u$ и p — сильное решение (NS) в Q_T
- либо построить такое $a \in H^1$, что $T_* < +\infty$,
т.е. $\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T_* - 0$

14. Проблема гладкой разрешимости или единственность?

Ch. Fefferman: Доказать, что для произвольного гладкого начального данного гладкое решение существует глобально по времени; либо же найти такое начальное данное, для которого изначально гладкое поле скоростей становится неограниченным за конечное время.

О.А. Ладыженская: Для произвольного достаточно гладкого начального данного найти такие функциональные классы, в которых удалось бы доказать как глобальное существование решений, так и их единственность.

§3. В поисках blow up

1. Проблема blow up с точки зрения гармонического анализа

$$\Omega = \mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3 / 2\pi\mathbb{Z}^3, \quad u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} \vec{c}_k(t) e^{ik \cdot x}, \quad \vec{c}_k(t) \cdot k = 0$$

$$\frac{d\vec{c}_k}{dt}(t) + |k|^2 \vec{c}_k(t) + \sum_{m \in \mathbb{Z}^3} \left(im \cdot \vec{c}_{k-m}(t) \right) \vec{c}_m(t) + ikp_k = 0 \quad (\text{NS})$$

$$\|u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_k |\vec{c}_k(t)|^2 \leq \text{const}, \quad t \in (0, T_*)$$

$$\|\nabla u(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_k |k|^2 |\vec{c}_k(t)|^2 \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow T_* - 0$$

$$E_{\leq N}(t) := \sum_{|k| \leq N} |\vec{c}_k(t)|^2, \quad E_{\geq N}(t) := \sum_{|k| \geq N} |\vec{c}_k(t)|^2$$

$$E(t) = E_{\leq N}(t) + E_{\geq N}(t) \leq \text{const}, \quad E_{\leq N}(t) \searrow \quad E_{\geq N}(t) \nearrow$$

2. Теория ε -регулярности

$$\sup_{r < R} \frac{1}{r} \int_{Q_r(z_0)} |\nabla u|^2 dz < \varepsilon_* \implies \exists r_* > 0 : \sup_{Q_{r_*}(z_0)} |u| < +\infty$$

особенность
в точке $z_0 = (x_0, t_0)$ $\longleftrightarrow$ локальная
концентрация энергии

3. Теорема Каффарелли–Кона–Ниренберга

$$\Sigma := \left\{ z_0 \in Q_T : u \notin L_\infty(Q_r(z_0)), \forall r > 0 \right\} \implies \mathcal{P}^1(\Sigma) = 0$$

особенностей не может быть много
(меньше чем пространственная 1D кривая)

4. Другие условия ε -регулярности

$$\begin{aligned} z_0 = 0 \quad C(u, r) &= \frac{1}{r^{2/3}} \|u\|_{L_3(Q_r)}, & D(p, r) &= \frac{1}{r^{4/3}} \|p\|_{L_{3/2}(Q_r)} \\ A(u, r) &= \sup_{t \in (-r^2, 0)} \frac{1}{r^{1/2}} \|u(\cdot, t)\|_{L_2(B_r)}, & E(u, r) &= \frac{1}{r^{1/2}} \|\nabla u\|_{L_2(Q_r)} \end{aligned}$$

5. Масштабная инвариантность NSE

$$u^R(x, t) := Ru(Rx, R^2t), \quad p^R(x, t) := R^2 p(Rx, R^2t)$$

u и p – решение (NS) в $Q_R \iff u^R$ и p^R – решение (NS) в Q

Все функционалы в условиях ε -регулярности
масштабно инвариантны:

$$F(u^R, 1) = F(u, R), \quad F(u, R) = \text{любой из } A(u, R), E(u, R), \dots$$

6. Свойства масштабно-инвариантных функционалов

если **хоть один** из $F(u, r)$
равномерно ограничен
 $\sup_{r < R} F(u, r) < +\infty \implies$ **все остальные** тоже
равномерно ограничены:
 $\sup_{r < R} A(u, r) < +\infty$ итд

если **хоть один** из $F(u, r)$
равномерно мал
 $\sup_{r < R} F(u, r) < \varepsilon \implies$ **все остальные** тоже
равномерно малы:
 $\sup_{r < R} A(u, r) < \varepsilon'$ итд

7. Суперкритичность уравнений Навье–Стокса



Что происходит с оценками
при переходе к малым масштабам?

$$u \mapsto u^R, \quad R \rightarrow 0$$

Модели:

суперкритические	$\Leftrightarrow$	оценки “взрываются”	$\Leftrightarrow$	$\ u^R\ _X \rightarrow +\infty$
критические	$\Leftrightarrow$	оценки инвариантны	$\Leftrightarrow$	$\ u^R\ _X = \ u\ _X$
субкритические	$\Leftrightarrow$	дают условие “малости”	$\Leftrightarrow$	$\ u^R\ _X \rightarrow 0$

Уравнения Навье–Стокса (априорная оценка — энергетическая):

$n = 2$ — критическая модель

$n = 3$ — суперкритическая модель

8. Классификация особенностей

Особенность
типа I $\iff$ все масштабно-инвариантные
функционалы конечны:
в точке $z_0 = 0$ $\sup_{r < R} (A(u, r) + E(u, r) + \dots) < +\infty$

Особенность
типа II $\iff$ все остальные особенности

9. Примеры особенностей типа I

$$|u(x, t)| \leq \frac{M}{|x| + \sqrt{-t}}, \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{-t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{-t}}\right) \quad \text{ИТД}$$

10. Борьба конвекции с диффузией

$$u(x, t) \sim \frac{M}{|x|}, \quad \Delta u \sim \frac{M}{|x|^3}, \quad (u \cdot \nabla)u \sim \frac{M^2}{|x|^3}$$

$M \ll 1 \implies$ диффузия побеждает $\implies$ NSE $\approx$ теплопроводность

$M \gg 1 \implies$ конвекция побеждает $\implies$ NSE $\approx$ Эйлер

11. Blow up – пределы $\iff$ античные решения

$$z_0 = 0 - \text{особенность типа I} \implies \begin{array}{l} \text{можно делать} \\ \text{масштабные преобразования} \end{array}$$

$$u^R(x, t) = R u(Rx, R^2 t)$$

$$Q \mapsto Q_{1/R}$$

$$\|u^R\|_X \leq \text{const} \implies \exists u^\infty = \lim_{R \rightarrow 0} u^R \equiv \text{blow up lim}_{z_0=0} u$$

$$u^\infty - \text{решение NSE в } \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0) \iff \text{“античное” решение}$$

12. Особенности типа I $\iff$ нетрив. античные решения

$$\begin{array}{l} u \text{ имеет в } z_0 = 0 \\ \text{особенность типа I} \end{array} \iff u^\infty = \text{blow up lim}_{z_0=0} u \neq 0$$

Seregin, Sverak, Koch, Nadirashvili, Barker

Параметр $R \rightarrow 0$ можно выбирать по-разному. Например:

$$\frac{1}{R_k} = M_k \approx \sup_{t < t_k} |u| \rightarrow +\infty \iff \sup_{x, t} |u^\infty(x, t)| \leq 1$$

13. Теорема Лиувилля — возможный путь к победе

$$u^\infty - \text{античное решение} \quad \xRightarrow{???} \quad u^\infty = 0, \text{ т.к. } \|u^\infty\|_X < \infty$$

$$|u^\infty(x, t)| \leq M$$

$$\text{контрпример к теореме Лиувилля} \quad \xRightarrow{???} \quad \exists u - \text{решение в } Q_R \text{ с особенностью}$$

14. Умеем ли мы доказывать теоремы Лиувилля для PDE?

Только для скалярных уравнений

$$\Delta u = 0, \quad \partial_t u - \Delta u = 0 \quad - \text{да}$$

$$n = 1 \quad u(x) = \arctg x \quad b(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \quad - u''(x) + b(x)u'(x) = 0$$

$$n = 3 \quad \partial_t u - \Delta u + b \cdot \nabla u = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad b \in L_{s,l}(\Pi), \quad \frac{3}{s} + \frac{2}{l} = 1 \quad - \text{да}$$

15. Осесимметричные решения

$$u(x, t) = u_r(r, z, t)e_r + u_\varphi(r, z, t)e_\varphi + u_z(r, z, t)e_z$$

Скрытая скалярная специфика для $\psi = ru_\varphi$

$$\partial_t \psi - \Delta_{r,z} \psi + \left(u - 2 \frac{x'}{|x'|^2} \right) \cdot \nabla \psi = 0, \quad |x'| = r$$

Seregin, Sverak, Koch, Nadirashvili, 2009

16. Автомодельные решения

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{-t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{-t}}\right), \quad u(0, t) \rightarrow \infty \quad t \rightarrow 0- \quad ???$$

$$\begin{cases} -\Delta U + \left(U - \frac{x}{2}\right) \cdot \nabla U - \frac{1}{2} U + \nabla P = 0 \\ \operatorname{div} U = 0 \end{cases} \quad \text{в } \mathbb{R}^3$$

$$u \in \text{энергетический класс в } Q = B \times (-1, 0) \implies U \equiv 0$$

Necas, Ruzicka, Sverak, 1995, Tsai, 1998

Скрытая скалярная специфика для $\Pi = \frac{1}{2} |U|^2 + P + \frac{x}{2} \cdot U$

17. Проблема неединственности в энергетическом классе

$$a(x) = \lambda a(\lambda x), \quad a(x) \sim \frac{M}{|x|}, \quad a \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3) \implies \exists u - \text{автомодельное решение "вперед"}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad \|u(\cdot, t) - a\|_{L_2(K)} \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +0$$

Будет ли оно единственным? — “похоже”, что нет.

Jia, Sverak, 2015 Albritton, Brue, Colombo, 2022