Считающая функция в комплексной и тропической алгебраической геометрии

А.К. Цих

Сибирский федеральный университет

Алгебра и геометрия:
конференция, посвященная 70-летию В. С. Куликова

(Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук)

г. Москва
23-27 мая, 2022

Амебы

Комплексная аналитическая геометрия изучает свойства решений систем аналитических уравнений в областях пространства $\mathbb{C}^n$ (или других комплексных многообразий).

Проекция на подпространство модулей (норм) – *схема Рейнхардта*:

$$(z_1, \dots, z_n) \to (|z_1|, \dots, |z_n|).$$

Комплексный тор $\quad \mathbb{T}^n := (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n.$

GKZ (1994): для алгебраических множеств $V \subset \mathbb{T}^n$ предложили рассматривать логарифмические проекции

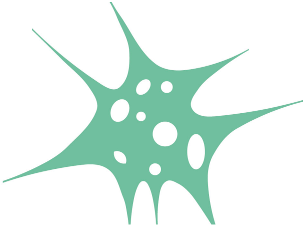
$$\mathrm{Log} : (z_1, \dots, z_n) \to (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

Определение 1

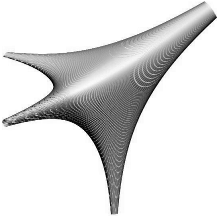
Образ $\mathrm{Log}\, V$ алгебраического множества $V \subset \mathbb{T}^n$ называется *амебой* для V и обозначается $\mathcal{A} = \mathcal{A}_V$.

Типичные виды амеб

Общий вид амебы для алгебраических кривых $V \subset \mathbb{T}^2$ изображен на следующем рисунке слева.



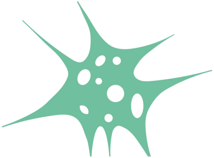
Амеба кривой в $\mathbb{T}^2$

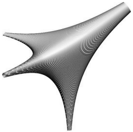


Амеба комплексной прямой в $\mathbb{T}^3$

Это фигура, уходящая в бесконечность в виде тонких щупальцев (похожая на свой биологический прототип).

Геометрия амеб для гиперповерхностей





Теорема (GKZ, 1994)

Дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ *амебы гиперповерхности* $V = \{f = 0\}$ *состоит из конечного числа связных компонент, каждая из которых открыта и выпукла.*

Отметим, что наличие ограниченных связных компонент в дополнении амебы плоской кривой (т.е. в $\mathbb{T}^2$) свидетельствует о том, что сама комплексная кривая не рациональна (имеет положительный род).

Порядок компонеты

Более детальную структуру амебы гиперповерхности можно получить с помощью следующего понятия.

Определение 2

Порядком связной компоненты $E \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ называется целочисленный вектор $\nu = \nu(E)$ с координатами

$$\nu_j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{Log^{-1}(u)} \frac{z_j f'_{z_j}}{f} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где u – любая точка из E.

Функция порядка

Теорема (FPT, 1998)

Функция порядка $E \to \nu(E)$ *является инъективной со значениями в многограннике Ньютона* Δ_f*:*

$$\nu : \{E\} \to \mathbb{Z}^n \cap \Delta_f .$$

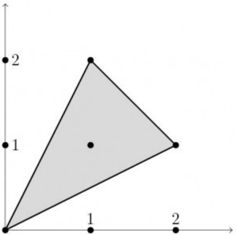
Двойственный конус $C^V_{\nu(E)}$ *к* Δ_f *в точке* $\nu(E)$ *есть конус рецессии компоненты* E*.*

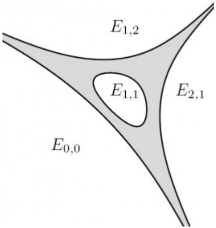
Из более ранней работы М.А. Мкртчяна и А.П. Южакова следует, что все вершины Δ_f принадлежат образу ν. Поэтому страведливо

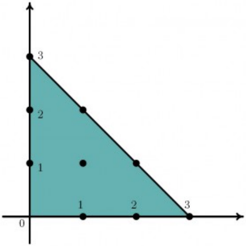
Следствие

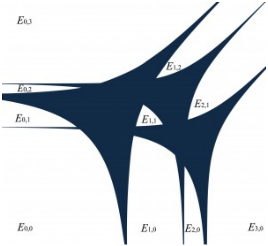
Число связных компонент дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ *не меньше числа вершин* Δ_f *и не больше числа целых точек в* Δ_f*:*

$$\# \mathrm{vert} \Delta_f \le \#\{E\} \le \#\{\mathbb{Z}^n \cap \Delta_f\}.$$


2
1
1
2


$E_{1,2}$
$E_{1,1}$
$E_{2,1}$
$E_{0,0}$


3
2
1
0
1
2
3


$E_{0,3}$
$E_{1,2}$
$E_{0,2}$
$E_{2,1}$
$E_{0,1}$
$E_{1,1}$
$E_{0,0}$
$E_{1,0}$
$E_{2,0}$
$E_{3,0}$

Интеграл Иенсена-Ронкина

Для гиперповерхности $V = \{f = 0\} \subset \mathbb{T}^n$ отображение порядка

$$\nu : \ \{E\} \to \mathbb{Z}^n$$

удобно определить через *интеграл Иенсена-Ронкина*

$$I_f(u) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}(u)} \log|f(z)| \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}, \quad u \in E.$$

Теорема (FPT-R)

Для гиперповерхности $V = \{f = 0\}$ значение $\nu(E)$ равно градиенту интеграла $I_f(u)$:

$$\nu(E) = \mathrm{grad} I_f(u)\big|_E. \tag{2}$$

Интеграл Иенсена: $n = 1$

Философия: в случае $n = 1$ интеграл Иенсена одновременно считает корни функции f и пустоты E в Log-шкале!

Интеграл Иенсена-Ронкина (соответствующий одномерному случаю $n = 1$) служит краеугольным камнем в конструировании *считающей функции*. С помощью нее решаются вопросы не только для распределения корней, но и значений функций (например, в теории Неванлинны распределений мероморфных функций).

Гомологическая интерпретация порядка: $k = 1$

$$\nu_j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{Log^{-1}(u)} \frac{z_j f'_{z_j}}{f} \frac{dz_1}{z_1} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_n}{z_n}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

Пусть $V \subset \mathbb{T}^n$ – алгебраическое множество чистой коразмерности k и $\mathcal{A}_V$ – его амеба.

Обозначим дополнения $V^c = \mathbb{T}^n \setminus V$ и $\mathcal{A}_V^c = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$.

В случае $k = 1$ порядок компоненты $E \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ определяется интегралом по циклу $\mathrm{Log}^{-1}(u)$, где u – произвольная точка из E. Но каждая такая точка является представителем класса 0-мерных гомологий $H_0(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V)$. При этом, формула (3) для координаты $\nu_j(u) = \nu_j(E)$ есть повторный интеграл: логарифмический вычет формы df/f по j-ой петле e_j вещественного тора $\mathrm{Log}^{-1}(u)$ и интеграл Коши по $e_1 \times \ldots [e_j] \ldots \times e_n$.

Формула (3) для $\nu(E)$ допускает интерпретацию гомоморфизма групп гомологий и когомологий:

$$\nu : \; H_0(\mathcal{A}_V^c) \to H^1((\mathbb{C} \setminus 0)^n)$$

Гомологический порядок: $k > 1$

По аналогии, в любой коразмерности k *порядок на дополнении* $\mathcal{A}_V^c$ определяем как отображение

$$\nu: \; H_{k-1}(\mathcal{A}_V^c) \to H^k(\mathbb{C} \setminus 0)^n).$$

Определение 3 (Sottile, Nisse, Tsikh)

В случае, когда $V = \{f_1 = \ldots = f_k = 0\}$ – полное пересечение, координата ν_J для *порядка* $(k-1)$-мерного цикла определяется интегралом

$$\nu_J([\gamma]) = \frac{1}{(2\pi i)^{n-k}} \int\limits_{\mathrm{Log}^{-1}\gamma} f^*(\omega) \frac{dz}{z}[J], \tag{4}$$

где $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ – поднабор из $\{1, \ldots, n\}$, ω – форма Бохнера-Мартинелли бистепени $(k, k-1)$, а $\dfrac{dz}{z}[J] = \wedge_{i \notin J} \dfrac{dz_i}{zi}$.

Неархимедова амеба (тропическое множество) (1/5)

Чтобы оставаться в рамках аналитической геометрии (т.е. исследовать объекты, «зануляющие» системы алгебраических или аналитических уравнений), целесообразно такую норму определить на поле $\mathbb{K}$, содержащем в себе $\mathbb{C}$. В качестве такого поля выбирается *поле рядов Пюизо*. Для его определения вначале вводится

поле $\mathbb{C}((t))$ рядов Лорана:

$$a = a(t) = \sum_{j \leq m} a_j t_j, \quad m \in Z.$$

Поле рядов Пюизо

определяется как объединение

$$\mathbb{K} = \cup_{n \geq 1} \mathbb{C}((t^{1/n})).$$

Таким образом, элементы последнего поля – ряды по дробным степеням $t^{j/n}$ переменного $t \in \mathbb{C}$, у которого показатели – рациональные числа с фиксированным знаменателем, причем число положительных показателей у каждого ряда конечно.

Неархимедова амеба (тропическое множество) (2/5)

Для каждого ряда Пюизо

$$a = \sum_{j \leq m} a_j t^{j/n} \in \mathbb{K}.$$

определен его *порядок* $v(a) = m/n$, равный максимальному показателю мономов ряда.

Свойства порядка:

$$v(a) = -\infty \Leftrightarrow a = 0;$$
$$v(ab) = v(a) + v(b);$$
$$v(a+b) \leqslant max\{v(a), v(b)\}.$$

Соответствие $a \to |a| = e^{v(a)}$ определяет *неархимедову норму*

$$\mathcal{N} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^n_{\geq 0}.$$

Она отличается от архимедовой нормы соответствующей заменой неравенства треугольника.

Неархимедова амеба (тропическое множество) (3/5)

Таким образом, логарифм нормы равен порядку: $log|a| = v(a)$.

Поэтому неархимедовый вариант отображения

$$\mathrm{Log}: \ (z_1, \ldots, z_n) \to (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$$

– это отображение $v : (\mathbb{K}^*)^n \to \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$, определенное по формуле

$$v(a_1, ..., a_n) = (v(a_1), ..., v(a_n)).$$

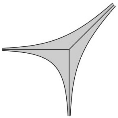
Неархимедова амеба (тропическое множество) (4/5)

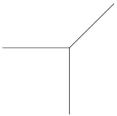
Пусть V – алгебраическое множество в $(\mathbb{K}^*)^n$.

Определение 4 (Einsidler, Kapranov, Lind, 2006)

Неархимедовой амебой множества V называется замыкание образа $v(V) \subset \mathbb{R}^n$. Ее называют *тропическим множеством* и обозначают $T(V)$.

Тропическая прямая $T(l)$ имеет вид «треножника» (см. рис. слева).





Топологическая структура неархимедовой амёбы проще, чем архимедовой, поэтому архимедова амёба более точно отражает свойства самого алгебраического множества V. Но большинство комбинаторных соотношений для V намного легче вычислить с помощью неархимедовой амёбы.

Гипотеза (SNT)

Если $V \subset \mathbb{T}^n$ – связное полное пересечение коразмерности k, то существует естественная инъекция

$$i: \ \widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus T(V)) \to \widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V).$$

Теорема (SNT)

Если $V \subset \mathbb{T}^n$ – связное полное пересечение коразмерности k, то отображение гомологического порядка

$$\nu: \ H_{k-1}(\mathcal{A}_V^c) \to \mathbb{Z}^{C_n^k},$$

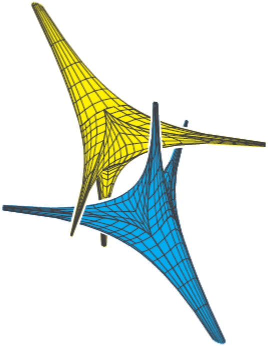
определяемое формулой (4), является инъекцией и принимает значения из многогранника N с вершинами, соответствующим тропическим образам.

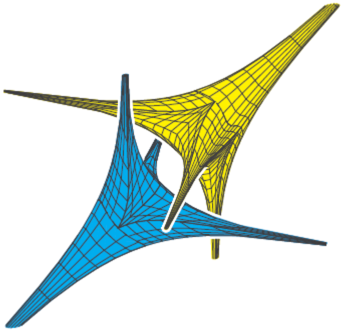
Пример

Рассмотрим несвязную кривую V:

$$t \to \left(t-1, t-\zeta, t-\zeta^2\right), \quad t \to \frac{1}{6}\left((t-1)^{-1}, (t-\zeta)^{-1}, (t-\zeta^2)^{-1}\right),$$

где ζ – первообразный корень из единицы степени 3.





Вогнутость амеб: $k = 1$ (1/2)

В комплексном анализе важную роль играет понятие *псевдовыпуклых* областей $G \subset \mathbb{C}^n$.

Вначале такое понятие придумал Е. Леви для областей с гладкой границей, и много лет позднее концепция псевдовыпуклости была сформулирована для любых областей.

В частности, псевдовыпуклыми областями являются дополнения $\mathbb{C}^n \setminus V$ комплексных гиперповерхностей V. Поэтому говорят, что сама гиперповерхность *псевдовогнута*.

Вогнутость амеб: $k = 1$ (2/2)

Дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ амебы наследует (от свойства псевдовыпуклости дополнения V) свойство выпуклости каждой связной компоненты дополнения амебы.

Последнее свойство для $X = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ можно выразить на гомологическом языке в следующем виде.

Для каждой прямой $l \in \mathbb{R}^n$ гомоморфизм (индуцированный вложением i) приведенных групп гомологий

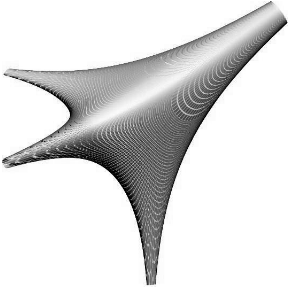
$$i_* : \tilde{H}_0(l \cap X) \to \tilde{H}_0(X)$$

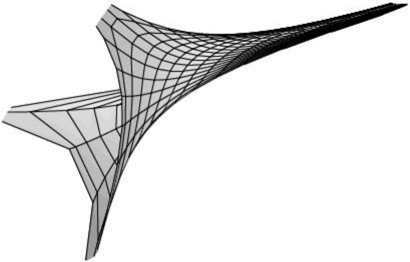
инъективен.

Иными словами, если две точки в X нельзя соединить на сечении $l \cap X$ (где l – прямая, проходящая через эти точки), то их нельзя соединить кривыми из X.

Вогнутость амеб: $k \geqslant 2$ (1/2)

Ситуация с поверхностями коразмерности $k \geqslant 2$ значительно сложнее. Амеба комплексной прямой в $\mathbb{T}^3$ была изображена ранее в виде наклонной башни. На следующем рисунке справа амёба прямой, заданной системой линейных уравнений с вещественными коэффициентами, а слева – с комплексными.





В статье Рименшнайдера (Riemenschneider) было введено понятие k-псевдовыпуклости областей в $\mathbb{C}^n$ и доказано, что дополнения поверхности $V \subset \mathbb{C}^n$ коразмерности $k+1$ являются k-псевдовыпуклыми. Таким образом, сами поверхности называют *k-псевдовогнутыми*. Следуя Громову, введем

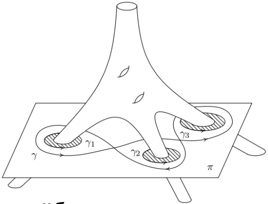
Определение 5

Подмножество $X \subset R^n$ называется *$(k-1)$-выпуклым*, если для любой k-мерной плоскости $\pi \subset \mathbb{R}^n$ гомоморфизм

$$i_* : \tilde{H}_{k-1}(\pi \cap X) \to \tilde{H}_{k-1}(X)$$

инъективен.

Выпуклость для полного пересечения



На рисунке изображена амёба комплексной кривой $V \subset \mathbb{C}^3$ (т.е. коразмерности $k = 2$) и плоскость π. В дополнении $\pi \setminus A_V$ приведен 1-цикл γ, не гомологичный нулю. Поскольку щупальца амебы A_V уходят в бесконечность специальным образом, этот цикл не гомологичен нулю и в $\mathbb{R}^3 \setminus A_V$. Справедлива следующая

Теорема [Бушуева-Цих, 2012]

Если V — полное пересечение коразмерности k (т.е. задается k полиномиальными уравнениями), то дополнение $\mathbb{R}^n \setminus A_V$ является $(k-1)$-выпуклым (а сама амёба A_V $(k-1)$-вогнута).

При дополнительном ограничении «положительности» на циклы γ инъективность i_* была доказана в статье Энриквеса, 2004.


Victor Kulikov