

Минимальные модели невырожденных торических гиперповерхностей

В. В. Батырев

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Конференция, посвященная 70-летию В.С. Куликова

24 мая 2022

- К началу 80-х годов благодаря работам Мори, Шокурова, Рида, Коллара, Каваматы и других математиков в алгебраической геометрии зародилось и сформировалось **общее представление** о том, каким образом следует расширить классическую **теорию бирациональной классификации алгебраических поверхностей** в случае алгебраических многообразий **размерности 3 и выше**.
- Серия логических гипотетических утверждений, возникших в связи с предложенной общей картиной бирациональной классификации алгебраических многообразий получила название **программы минимальных моделей** или **теорией Мори**.

Цель программы минимальных моделей

Цель программы минимальных моделей состоит в том, чтобы показать существование в каждом классе бирациональной эквивалентности проективных алгебраических многообразий некоторых "простых" представителей, называемых **минимальными моделями** данного бирационального класса.

Размерность Кодайры

Согласно теореме Хиронаки, каждый класс бирациональной эквивалентности d -мерных комплексных алгебраических многообразий содержит проективную гладкую модель X , которая позволяет определить её дискретные инварианты (так называемые **плюрироды** многообразия X):

$$P_m(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, (\Omega_X^d)^{\otimes m}), \quad \forall m \geq 0,$$

не зависящие от выбора гладкого проективного представителя X в данном бирациональном классе $[X]$. Плюрироды имеют асимптотически степенной рост в зависимости от m :

$$P_m(X) \asymp m^{\kappa}, \quad \kappa \in \{0, 1, \dots, d\} \cup \{-\infty\}$$

где неотрицательное целое число $\kappa = \kappa(X)$ (или символ $-\infty$) называемое **размерностью Кодайры** данного бирационального класса $[X]$.

Многообразия неотрицательной кодаировой размерности

Определение

Говорят, что гладкое проективное комплексное многообразие X имеет **отрицательную размерность Кодайры**, если $\kappa(X) = -\infty$, то есть, если

$$P_m(X) = 0 \quad \forall m \geq 0.$$

В противном случае говорят, что бирациональный класс X имеет **неотрицательную кодаирову размерность**.

Определение

Бирациональный класс гладкого проективного комплексного многообразия X называется **Калаби-Яу**, если

$$P_m(X) = 1 \quad \forall m \geq 0.$$

В этом случае размерность Кодайры многообразия X , очевидно, равна 0.

ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ $\kappa(X) \geq 0$

Каждое гладкое комплексное проективное алгебраическое многообразие X неотрицательной кодаировой размерности бирационально эквивалентно проективному алгебраическому многообразию Y , имеющему по меньшей мере терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности и полубильный канонический класс K_Y , определяющий регулярный сюръективный морфизм $\eta : Y \rightarrow Z$ на некоторое проективное многообразие Z размерности $\kappa(X)$. Многообразие Y в этом случае называется **минимальной моделью** многообразия X , а морфизм $\eta : Y \rightarrow Z$ – **расслоением Иитаки**.

В докладе мы рассмотрим комбинаторное доказательство этого основного утверждения для бирациональных классов невырожденных торических гиперповерхностей произвольной размерности.

Многогранник Ньютона P

Рассмотрим многочлен Лорана

$$f(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{m}} \mathbf{t}^{\mathbf{m}} \in \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$$

в качестве регулярной функции на алгебраическом торе

$$\mathbb{T}^d := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \cong (\mathbb{C}^*)^d.$$

Его **многогранником Ньютона** P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^d$:

$$P = \operatorname{Newt}(f) := \operatorname{Conv}(\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d \mid c_{\mathbf{m}} \neq 0).$$

Срезки многочлена Лорана на грани $Q \preceq P$

Запишем многочлен Лорана $f(\mathbf{t})$ в виде

$$f(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d \cap P} c_{\mathbf{m}} \mathbf{t}^{\mathbf{m}},$$

где P – его многогранник Ньютона. Тогда **срезкой f на грань $Q \preceq P$** называется многочлен Лорана

$$f_Q(\mathbf{t}) := \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^d \cap Q} c_{\mathbf{m}} \mathbf{t}^{\mathbf{m}}.$$

Невырожденные торические гиперповерхности

Определение (Хованский, Варченко, Кушниренко)

Многочлен Лорана f и определяемая им аффинная торическая гиперповерхность $H := \{f = 0\} \subset \mathbb{T}^d$ называются **невырожденными**, если для любой грани $Q \preceq P$ система уравнений

$$f_Q(\mathbf{t}) = t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} f_Q(\mathbf{t}) = \cdots = t_d \frac{\partial}{\partial t_d} f_Q(\mathbf{t}) = 0$$

не имеет решений в T^d .

Геометрически условие невырожденности эквивалентно условию гладкости замыкания $\overline{H}_\nu$ аффинной гиперповерхности $H \subset \mathbb{T}^d$ в любом элементарном торическом вложении $\mathbb{T}^d \subset X_\nu \cong (\mathbb{C}^*)^{d-1} \times \mathbb{C}$, соответствующем выбору однопараметрической подгруппы $\nu : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}^d$, и трансверсальности $\overline{H}_\nu$ к единственной торической дивизориальной орбите $D_\nu \cong (\mathbb{C}^*)^{d-1}$ в X_ν .

Алгебраическая характеристика невырожденности

Условие невырожденности торической гиперповерхности является открытым по Зарисскому условием на конечный набор коэффициентов c_m ($m \in A$) для мономов $c_m t^m$, входящих в многочлен Лорана f . Это условие может быть явно выражено через необращение в нуль так называемого **главного A -детерминанта** введенным Гельфандом, Капрановым и Зелевинским в конце 80-х годов прошлого века.

И.М.Гельфанд, А.В.Зелевинский, М.М.Капранов. *Дискриминанты многочленов многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона*. Алгебра и Анализ, **2** (1991), 449–505.

Примеры невырожденных многочленов Лорана

Рассмотрим многочлен Лорана

$$f := \sum_{i=0}^d c_{\mathbf{m}_i} \mathbf{t}^{\mathbf{m}_i},$$

у которого мономы Лорана

$$\mathbf{t}^{\mathbf{m}_0}, \dots, \mathbf{t}^{\mathbf{m}_d} \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_d]$$

имеют аффинно независимые экспоненты $\mathbf{m}_0, \dots, \mathbf{m}_d \in \mathbb{Z}^d$. Это эквивалентно тому условию, что квадратная целочисленная матрица размера $(d+1) \times (d+1)$ состоящая из строчек $(1, \mathbf{m}_0), \dots, (1, \mathbf{m}_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ имеет ненулевой определитель. В этом случае для любых ненулевых коэффициентов $c_{\mathbf{m}_0}, \dots, c_{\mathbf{m}_d}$ соответствующий многочлен Лорана f является невырожденным, а его многогранник Ньютона P является d -мерным симплексом.

Примеры невырожденных многочленов Лорана

$$f = 1 + t_1^{k_1} + \cdots + t_d^{k_d}, \quad k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$f = 1 + t_1^4 + t_2^2$$

$$f = t_1 + t_2 + t_1 t_2$$

$$f = 1 + t_1 t_2^2 + t_1^2 t_2$$

$$f = t_1 + t_2 + \frac{1}{t_1 t_2}$$

Основные обозначения

Пусть $M \cong \mathbb{Z}^d$ свободная абелева группа ранга d , $N := \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ двойственная группа с **естественным спариванием**

$$\langle *, * \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Будем рассматривать соответствующие векторные пространства $M_{\mathbb{R}} := M \otimes \mathbb{R}$ и $N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$ вместе с индуцированным спариванием

$$\langle *, * \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Для любого выпуклого компакта $K \subset M_{\mathbb{R}}$ рассмотрим его непрерывную выпуклую **опорную функцию**

$$\text{ord}_K : N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{ord}_K(y) := \min_{x \in K} \langle x, y \rangle, \quad y \in N_{\mathbb{R}}.$$

Внутренность Файна целочисленного многогранника P

Пусть P — выпуклый d -мерный целочисленный многогранник. Тогда

$$P = \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle x, \nu \rangle \geq \text{ord}_P(\nu) \quad \forall \nu \in N \setminus \{0\}\}.$$

Определение.

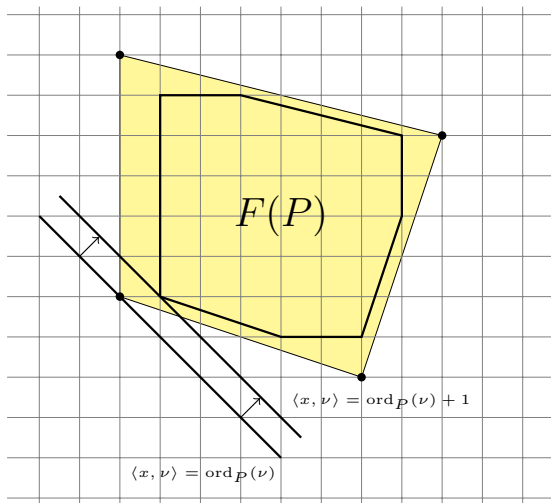
Подмножество $F(P) := \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle x, \nu \rangle \geq \text{ord}_P(\nu) + 1 \quad \forall \nu \in N \setminus \{0\}\}$ в P называется **внутренностью Файна** многогранника P .

- подмножество $F(P) \subset P$ выпукло.
- подмножество $F(P)$ состоит из всех точек $x \in P$, которые имеют **целочисленное расстояние** не менее 1 до любой целочисленной опорной гиперплоскости многогранника P .
- Каждая внутренняя целая точка многогранника P содержится в $F(P)$. В частности, мы всегда имеем включение

$$\text{Conv}(\text{Int}(P) \cap M) \subseteq F(P).$$

- В случае $\dim P = 2$ всегда имеет место равенство $F(P) = \text{Conv}(\text{Int}(P) \cap M)$

Внутренность Файна целочисленного многогранника P



История возникновения понятия

Вдохновлённый работами Данилова и Хованского:

- В.В. Данилов, *Геометрия торических многообразий*, Успехи математических наук **33** :2 (1978), 97-154.
- А.Г. Хованский, *Многогранники Ньютона и род полных пересечений*, Функциональный анализ и его приложения, **12** (1978), 51-61.

Джонатан Файн, который был аспирантом Рида в университете Ворвик, ввёл это понятие в своей диссертации:

- Jonathan Fine, *Resolution and completion of algebraic varieties*, Ph.D.-Thesis, University of Warwick, June 1983.
(в своей диссертации [Ph.D.-Thesis, §4] Джонатан Файн назвал $F(P)$ **сердцевиной (heart) многогранника P .**)

Позже его научный руководитель в своей известной статье

- Miles Reid, *Young person's guide to canonical singularities*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985.

предложил называть $F(P)$ **внутренностью Файна (Fine interior)**.

Цель доклада

Основная цель моего доклада состоит в том, чтобы как можно более широко проинформировать аудиторию алгебраических геометров об уникальной "пропущенной возможности" в конце 80-х годов прошлого века, которая могла бы изменить весь ход истории развития бирациональной алгебраической геометрии за последние 30-35 лет.

Результаты, о которых я хочу сообщить, являются настолько простыми в своей формулировке и настолько полезными для того, чтобы начинающие студенты смогли бы наглядно разобраться в сути бирациональной классификации многообразий неотрицательной размерности Кодаиры, что мне просто совершенно непонятно, как могло такое случиться, что эти результаты так долго не были замечены и не были получены кем-то ещё до начала 1990-х годов, несмотря на то, что все необходимые предпосылки и методы к этому времени уже были полностью развиты.

Комбинаторная формула для размерности Кодайры

Теорема

Размерность Кодайры κ невырожденной торической гиперповерхности $H \subset \mathbb{T}^d$ с многогранником Ньютона P вычисляется по формуле

$$\kappa = \min\{d - 1, \dim F(P)\}.$$

В частности, невырожденная торическая гиперповерхность с многогранником Ньютона имеет неотрицательную размерность Кодайры тогда и только тогда, когда внутренность Файна $F(P)$ не пуста.

Критерий для бирациональных моделей Калаби-Яу

Ещё в 1976 году Аскольд Хованский доказал, что геометрический род невырожденной торической гиперповерхности с многогранником Ньютона P равен числу его внутренних целых точек $|Int(P) \cap M|$. Из этого результата, в частности, следует, что если невырожденная торическая гиперповерхность бирациональна многообразию Калаби-Яу, то её многогранник Ньютона обязан содержать ровно одну внутреннюю целую точку. К настоящему моменту такие целочисленные многогранники полностью классифицированы в размерности 2 и 3.

Теорема (Критерий Калаби-Яу)

Невырожденная торическая гиперповерхность с многогранником Ньютона P бирациональна модели Калаби-Яу тогда и только тогда, когда внутренность Файна $F(P)$ состоит в точности из единственной внутренней целой точки многогранника P .

Определение

Целочисленный d -мерный многогранник $P \subset M_{\mathbb{R}}$, содержащий $0 \in M$ в своей внутренности называется **рефлексивным**, если **полярно двойственный** ему многогранник

$$P^* := \{y \in N_{\mathbb{R}} : \langle x, y \rangle \geq -1, \forall x \in P\}$$

также имеет только целые вершины.

Для целочисленных многогранников размерности 2 свойство рефлексивности равносильно свойству наличия ровно одной внутренней целой точки. Следующий пример показывает, что для целочисленных многогранников размерности 3 это уже не так.

Пример нереклексивного многогранника с $F(P) = 0$

Целочисленный многогранник P задаваемый неравенствами

$$x_1 \geq -1, x_2 \geq -1, x_3 \geq -1, \quad -2 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

имеет внутри себя ровно одну целую точку: $(0, 0, 0)$. Однако, P не является рефлексивным, поскольку ему полярно двойственный многогранник P имеет рациональную вершину: $(1/2, 1/2, 1/2)$. Заметим, что $F(P) = \{(0, 0, 0)\}$. Согласно критерию модели Калаби-Яу, невырожденная торическая гиперповерхность с многогранником Ньютона P бирациональна $K3$ -поверхности. В действительности, эту поверхность можно реализовать в виде гладкой квартики в $\mathbb{P}^3$, содержащей точку с однородными координатами $(1 : 0 : 0 : 0)$, что видно из сдвига P на вектор $(1, 1, 1) \in \mathbb{Z}^3$:

$$P + (1, 1, 1) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \quad 1 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 4.$$

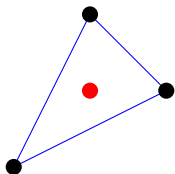
Мы получаем минимальную модель в виде замыкания аффинной торической гиперповерхности H в торическом многообразии $\mathbb{P}^3$.

Построение минимальных моделей в случае рефлексивных многогранников (arXiv:alg-geom/9310003)

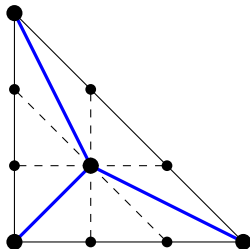
- На первом шаге рассматривается замыкание торической гиперповерхности H в горнштейновом торическом многообразии Фано V_P , определяемом нормальным веером Σ_P к рефлексивному многограннику P . В результате мы получаем **каноническую модель Калаби-Яу $\tilde{H}$** , имеющую, возможно, канонические особенности.
- На втором шаге применяется симплициальное подразбиение $\hat{\Sigma}$ веера Σ_P , которое удовлетворяет условию $\hat{\Sigma}[1] = P^* \cap (N \setminus \{0\})$. Этим мы совершаем частичное крепантное разрешение всех канонических особенностей многообразия V_P и получаем в результате симплициальное торическое многообразие $\hat{V}$ с терминальными особенностями. Замыкание $\hat{H}$ гиперповерхности H в торическом многообразии $\hat{V}$ является **минимальной моделью Калаби-Яу**.

Простейший пример

Двумерный рефлексивный многоугольник и его полярно двойственный:



$$F(P) \subset P$$

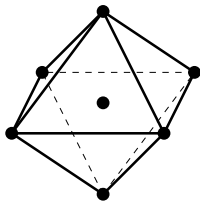


$$P^*, S_F(P)$$

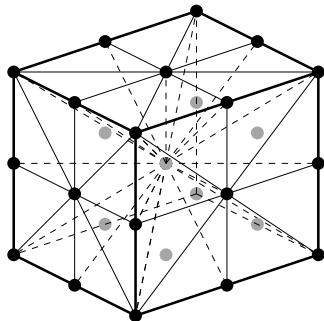
$$f(\mathbf{t}) = t_1 + t_2 + (t_1 t_2)^{-1}$$

3-мерные рефлексивные многогранники

$$f(t) := t_1 + t_1^{-1} + t_2 + t_2^{-1} + t_3 + t_3^{-1}.$$



P



P^*

- Shihoko Ishii, *The minimal model theorem for divisors of toric varieties*, Tohoku Math. J. (1999), 213-226.

Теорема

Невырожденная торическая гиперповерхность $H \subset \mathbb{T}^d$ задаваемая многочленом Лорана $f \in \mathbb{C}[M]$ с многогранником Ньютона P с условием $F(P) \neq \emptyset$ всегда может быть построена через её замыкание в некотором симплициальном торическом многообразии $\hat{V}$.

Носитель многогранника $F(P)$

Определение

Носителем внутренней Файна $F(P)$ называется подмножество

$$S_F(P) := \{\nu \in N : \text{ord}_{F(P)}(\nu) = \text{ord}_P(\nu) + 1\}.$$

- Только элементы $\nu \in N$ из подмножества $S_F(P)$ являются существенными в системе линейных неравенств, определяющих внутренность Файна $F(P)$.
- Подмножество $S_F(P)$ состоит из неразложимых элементов в максимальных конусах нормального веера Σ_P . По этой причине множество $S_F(P)$ конечно.
- минимальная модель $\hat{H}$ невырожденной аффинной гиперповерхности H получается взятием её замыкания в симплициальном торическом многообразии $\hat{V}$, соответствующем вееру $\hat{\Sigma}$, одномерные конуса которого состоят из лучей порождённых элементами $S_F(P)$, то есть $\hat{\Sigma}[1] = S_F(P)$.

Каноническая оболочка многогранника P

Определение

Пусть P - целочисленный многогранник, удовлетворяющий условию $F(P) \neq \emptyset$. Назовём **канонической оболочкой многогранника P** выпуклый многогранник $C(P)$, определяемый неравенствами,

$$C(P) := \{x \in M_{\mathbb{R}} : \langle x, \nu \rangle \geq \text{ord}_P(\nu) \quad \forall \nu \in S_F(P)\}.$$

- $C(P)$ является в общем случае рациональным многогранником, содержащим P .
- Если $\dim P = 2$, имеет место равенство $P = C(P)$. Равенство $P = C(P)$ также выполнено, если P является рефлексивным. Однако, в общем случае многогранник $C(P)$ больше, чем P .

Определение

Для многогранника Ньютона P с условием $F(P) \neq \emptyset$ определяется многогранник

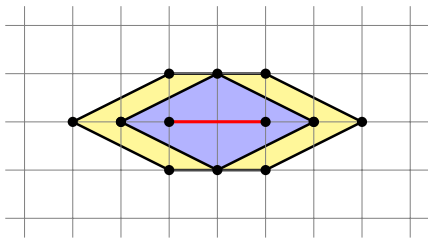
$$\tilde{P} := C(P) + F(P).$$

Теорема

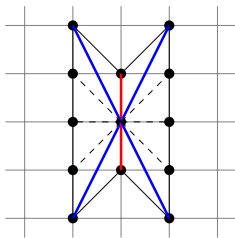
Нормальный веер $\tilde{\Sigma}$ к многограннику $\tilde{P}$ задаёт некоторое $\mathbb{Q}$ -горенштейново торическое многообразие, имеющее по меньшей мере канонические особенности. Имеет место включение $\tilde{\Sigma}[1] \subset S_F(P)$. Выбор проективного симплициального подразбиения $\hat{\Sigma}$ веера $\tilde{\Sigma}$, удовлетворяющего условию $\hat{\Sigma}[1] = S_F(P)$, определяет крепантный морфизм соответствующих торических многообразий $\varphi : \hat{V} \rightarrow \tilde{V}$. Торическое симплициальное многообразие $\hat{V}$ имеет по меньшей мере терминальные особенности, а замыкание $\hat{H}$ торической гиперповерхности $H \subset \mathbb{T}^d$ в торическом многообразии $\hat{V}$ является **минимальной моделью**.

Пример: $\dim P = 2$, $\dim F(P) = 1$

$$f := t_1^2 + t_2 + t_1^{-2} + \lambda t_2^{-1}, \quad \lambda \neq 1$$



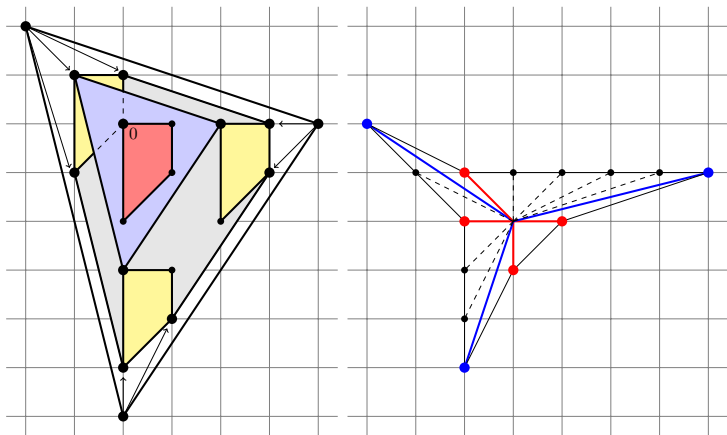
$$F(P) \subset P \subset \tilde{P} = F(P) + P$$



$$S_F(P), \tilde{\Sigma}$$

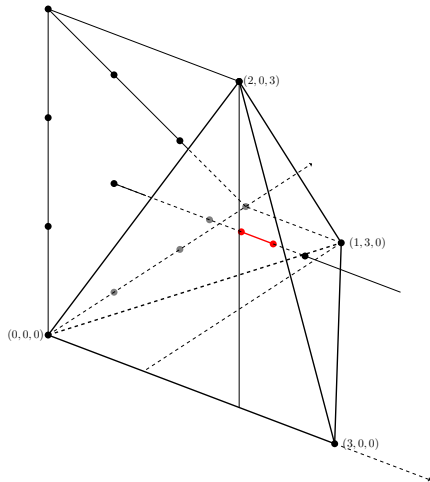
Пример: $\dim P = 2$, $\dim F(P) = 2$

$$f(t) := t_1^{-1}t_2 + t_1^2 + t_2^{-3}.$$

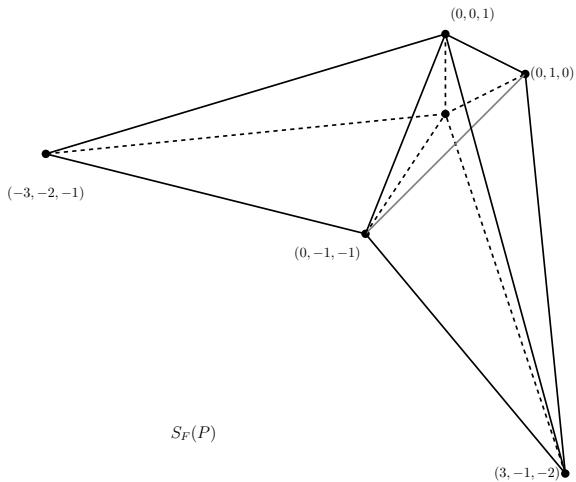


Эллиптическая поверхность

$$f(t) := (1 + t_1^3) + t_1 t_2^3 + t_1^2 t_3^3 = 0, \quad t_1 \in \mathbb{C}.$$



3-мерный веер $\widehat{\Sigma}$



- Для любой невырожденной торической гиперповерхности H с многогранником Ньютона P с условием $F(P) \neq \emptyset$ существует единственная **каноническая модель** $\tilde{H}$, определенная однозначно многогранником P .
- **Размерность Кодaira** минимальной модели $\hat{H}$ вычисляется по формуле $\kappa = \min\{d - 1, \dim F(P)\}$.
- Общий слой торического морфизма $\tilde{V} \rightarrow V_{F(P)}$, который соответствует слагаемому $F(P)$ в сумме Минковского $\tilde{P} = F(P) + C(P)$ является $(d - \kappa)$ -мерным торическим каноническим многообразием Фано.
- **Общие слои расслоения Иитаки** $\tilde{V} \rightarrow V_{F(P)}$ являются $(d - 1 - \kappa)$ -мерными каноническими моделями невырожденных торических гиперповерхностей с размерностью Кодaira 0.

Степень канонического класса $(K_{\tilde{Z}})^{d-1}$

Обозначим через $\text{Vol}_k(\Delta)$ k -мерный объём k -мерного целочисленного многогранника, получаемого из обычного объёма, умножением на $k!$.

Теорема

Пусть $\tilde{H}$ каноническая модель невырожденной торической гиперповерхности $H \subset \mathbb{T}^d$ с многогранником Ньютона P . Тогда

$$(K_{\tilde{H}})^{d-1} = \begin{cases} \text{Vol}_d(F(P)) + \sum_{\substack{Q \prec F(P) \\ \dim Q = d-1}} \text{Vol}_{d-1}(Q), & \text{if } \dim F(P) = d; \\ 2\text{Vol}_{d-1}(F(P)), & \text{if } \dim F(P) = d-1; \\ 0, & \text{if } \dim F(P) < d-1. \end{cases}$$

Классы Черна c_1^2 и c_2 минимальной поверхности $\hat{H}$

Следствие

Пусть P - 3-мерный целочисленный многогранник с условием $F(P) \neq \emptyset$. Тогда классы Черна c_1^2 и c_2 гладкой минимальной модели $\hat{H}$ невырожденной торической поверхности $H \subset \mathbb{T}^3$ с многогранником P однозначно определяются его внутренностью Файна $F(P)$.

Это немедленно следует из формул:

$$c_1^2(\hat{H}) = \begin{cases} \text{Vol}_3(F(P)) + \sum_{\substack{Q \prec F(P) \\ \dim Q=2}} \text{Vol}_2(Q), & \text{if } \dim F(P) = 3; \\ 2\text{Vol}_2(F(P)), & \text{if } \dim F(P) = 2; \\ 0, & \text{if } \dim F(P) \leq 1. \end{cases}$$

$$c_2(\hat{H}) = 12\chi(\mathcal{O}_{\hat{H}}) - c_1^2(\hat{H}), \quad \text{где } \chi(\mathcal{O}_{\hat{H}}) = 1 + |F(P) \cap \mathbb{Z}^3|.$$

Спасибо за внимание!