

Суммарные R_p -числа вещественных
кривых, которые сохраняются при
перестройках.

(по совместным работам с С.Рикашным)

Москва, 23-27 мая 2022 г.

к 70-летию В. Кушкова



Страсбургские времена



"Человеку надо мало:
чтоб искал
и находил."

Р. Рождественский

Подробности в

arXiv: 2102.04713, 2107.06988, 2203.10503

① Постановка задачи

по Weischiager:

нодальные вещ. рац. кривые


неуединенные
дв. точки


уединенные
дв. точки

$(-1)^{\# \text{уед.}} \Leftrightarrow$ вес кривой

рассмотрим: вещ. рац. пов. X ;

$D \in H_2^-(X) = \text{Ker} \{1 + \text{conj}_*: H_2(X) \rightarrow H_2(X)\}$;

$\bar{x} \subset X$; $|\bar{x}| = C_1(X)D - 1$; $\text{conj } \bar{x} \neq \bar{x}$.

$$\sum_{\substack{A \subset X \text{ вещ. рац.} \\ [A] = D \\ \bar{x} \subset A}} (-1)^{\# \text{уед.}(A)} = \tilde{W}(X, \text{conj}, D, \bar{x})$$

$T_h(W)$ Число $\tilde{W}(X, \text{conj}, D, \bar{x})$ сохраняется при любой деформации $(X, \text{conj}, D, \bar{x})$, при которой поверхность X остается неособой.

Пример: подсчёт прямых на кубической пов-ти, сохраняющийся при wall-crossing.
Здесь 5 компонент связ. в пр-ве модулей:

$$\begin{array}{cccccc}
 S^2 \amalg \mathbb{R}P^2, & \mathbb{R}P^2, & \#3\mathbb{R}P^2, & \#5\mathbb{R}P^2, & \#7\mathbb{R}P^2 \\
 \underbrace{3} & \underbrace{3} & 7 & 15 & 27 \\
 h=3, e=0 & h=5, e=2 & h=9, e=6 & h=15, e=12 \\
 \hline
 h-e=3
 \end{array}$$

Магический смысл:

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{h} \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3$$

top.

или

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_e$$

Концептуальное определение:

на $\mathbb{R}P^3$ есть 2 Spin-структуры

$$\bigcup_{X_{\mathbb{R}}} \underbrace{TX_{\mathbb{R}} \oplus \nabla X_{\mathbb{R}}}_{\det^{\text{spin}} TX_{\mathbb{R}}} = T\mathbb{R}P^3|_{X_{\mathbb{R}}}$$

$\Rightarrow$ эта пара Spin-структур индуцирует на $X_{\mathbb{R}}$ две "противоположные" Pin⁻-структуры

$$\Leftrightarrow q: H_1(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}/2) \rightarrow \mathbb{Z}/4:$$

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + 2xy \quad (*)$$

L -гиперболическая iff $q([L]_{\mathbb{R}}) = q(W_1)$ (4)

Обычное сокращение: $q(W_1) = 1$ и тогда

$$h-e = \sum_{L \subset X_{\mathbb{R}}} i^{q(L)-1} = 3$$

Задача: обобщить на кривые старших степеней и другие пов-ти.

II) Утвердительные ответы

X -веществ. пов-ть дель Пеццо, $X_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$

Правило подсчёта:

$$\mathcal{L}_m \hookrightarrow \{ \bar{z} \in H_2^-(X), -\bar{z} \cdot K_X = m \}$$

$$N_{m,k} \hookrightarrow \sum_{\substack{[A] \in \mathcal{L}_m \\ A \supset \bar{x}}} i^{q(A_{\mathbb{R}}) - m^2} \cdot w(A)$$

число слагаемых конечно,
поскольку X -дель Пеццо

$(-1)^{\# \text{неуз.}(A)}$

Th1 Предположим: что $\forall$ вещ. пов-ти X в данном комп. деф. классе пов. дель Пеццо (K^2 фикс.) существует Рит-стр. (пара против. структур) со следующими свойствами:

- 1) q обращается в 0 на всех веществ. исчезающих циклах

а) q инвариантна относительно
вещ. деформаций и вещ. изоморфизмов
Тогда $N_{m,k}$ зависят только от m и k .

Th. 2 Такая Pic -структура (пара крив. структур существует для $K^2=3, 1$
(соотв. $K^2=2$).

Th. 3 Для $\forall$ из этих 3^x классов
 $N_{m,k}=0$ если $m \neq k+1(2)$ or $k \geq 2$

Кроме того, если $K^2=2$, то $N_{m,0}=0$
при $\forall$ нечетном m .

Th. 4 Выполняются следующие
рекуррентные соотношения:

$$m K^2 N_{m,0} = \sum_1^n \binom{n-1}{j-1} 2j(m-2j)^2 N_{m-2j,0} N_{2j,1}$$

для $\forall m=2n+1$

$$m K^2 N_{m,1} = \sum_1^n \binom{n-1}{j-1} 2j(m-2j)^2 N_{m-2j,1} N_{2j,1}$$

для $\forall m=2n$.

Следствие

$$N_{m,0} = \frac{1}{4} N_{1,0} 6^n \left(n + \frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

при $m=2n+1$,

$$N_{m,1} = N_{2,1} b^{n-1} n^{n-3}$$

при $m=2n$,

где $b = \frac{4 N_{2,1}}{K^2}$

Удивительное соотношение:

$$N_{2m,1} = 2 \sum_{\alpha \in \mathcal{L}^m(X)} (e\alpha)^2 \text{GW}_\alpha(X)$$

для $\forall$ фиксированного комплексного
постоянного цикла $e \in H_2(X)$.

Происхождение правильных Pin-структур:

$$K^2=2 \Rightarrow \begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & P_{\mathbb{R}}(1,1,1,2) \\ \uparrow & \mathbb{R} & \uparrow \\ \text{двусторонне} & & \text{Pin}^- \text{-стр.} \end{array}$$

$$K^2=1 \Rightarrow \begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & P_{\mathbb{R}}(1,1,2,3) \\ \uparrow & \mathbb{R} & \uparrow \\ \text{двусторонне} & & \text{Pin}^- \text{-стр.} \end{array}$$

$$N_{m,k}$$

(m,k)	$K^2 = 1$	$K^2 = 2$	$K^2 = 3$
(1,0)	8	0	3
(2,1)	30	6	3
(3,0)	160	0	2
(4,1)	1800	36	6
(5,0)	28800	0	12
(6,1)	432000	864	48