

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ: ПРИНЦИП ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ*

М. И. Гомоюнов

ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия

m.i.gomoyunov@gmail.com

Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $T > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Для $t \in [0, T]$ рассмотрим множество $AC^\alpha[0, t]$ всех функций $w: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, каждая из которых представима в виде $w(\tau) = w(0) + (I_{0+}^\alpha h)(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, для некоторой своей измеримой ограниченной функции $h: [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$, где I_{0+}^α — оператор интегрирования Римана–Лиувилля порядка α (см., например, [1]). Обозначим через G множество всех пар $(t, w(\cdot))$ таких, что $t \in [0, T]$ и $w(\cdot) \in AC^\alpha[0, t]$. На множестве G введем метрику

$$\text{dist}((t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot))) = |t - t'| + \max_{\xi \in [0, T]} \|w(\xi \wedge t) - w'(\xi \wedge t')\|,$$

где $(t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot)) \in G$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$. Положим $G^0 = \{(t, w(\cdot)) \in G: t < T\}$.

Рассмотрим задачу оптимального управления, в которой движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$({}^C D_{0+}^\alpha x)(\tau) = f(\tau, x(\tau), u(\tau)) \quad \text{при п.в. } \tau \in [t, T] \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(\tau) = w(\tau), \quad \tau \in [0, t], \quad (2)$$

а минимизируемый показатель качества имеет вид

$$J(t, w(\cdot), u(\cdot)) = \sigma(x(T)) + \int_t^T \chi(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

Здесь ${}^C D_{0+}^\alpha$ — оператор дифференцирования Капуто порядка α (см., например, [2]), $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы, $u(\tau) \in P$ — управление, $P \subset \mathbb{R}^r$ — компакт, $r \in \mathbb{N}$, $(t, w(\cdot)) \in G$ — начальные данные.

Отметим, что необходимость задавать в условии (2) значения $x(\tau)$ при всех $\tau \in [0, t]$ вызвана наследственным характером оператора ${}^C D_{0+}^\alpha$.

Предположим, что функции $f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\chi: [0, T] \times \mathbb{R}^n \times P \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны; f удовлетворяет условию подлинейного роста по второму аргументу; f и χ локально липшицевы по второму аргументу. Множество допустимых управлений $\mathcal{U}(t)$ состоит из всех измеримых функций $u: [t, T] \rightarrow P$. Каждому управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$ отвечает единственное движение системы $x(\cdot)$ — функция из $AC^\alpha[0, T]$, удовлетворяющая начальному условию (2) и уравнению (1).

Определим функционал цены (функционал оптимального результата)

$$\rho(t, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)} J(t, w(\cdot), u(\cdot)), \quad (t, w(\cdot)) \in G.$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-10070, <https://rscf.ru/project/21-71-10070/>).

Согласно [3] функционал $\rho: G \rightarrow \mathbb{R}$ характеризуется краевым условием

$$\rho(T, w(\cdot)) = \sigma(w(T)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha[0, T],$$

и следующим свойством (принцип динамического программирования): каковы бы ни были $(t, w(\cdot)) \in G$ и $\tau \in [t, T]$, имеет место равенство

$$\rho(t, w(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)} \left(\rho(\tau, x_\tau(\cdot)) + \int_t^\tau \chi(\xi, x(\xi), u(\xi)) d\xi \right), \quad (4)$$

где $x(\cdot)$ — движение системы, отвечающее $(t, w(\cdot))$ и $u(\cdot)$, а через $x_\tau(\cdot)$ обозначено сужение функции $x(\cdot)$ на промежуток $[0, \tau]$.

Далее рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби, которое является выражением свойства (4) в инфинитезимальной форме:

$$\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) + H(t, w(t), \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot))) = 0, \quad (t, w(\cdot)) \in G^0. \quad (5)$$

Здесь искомым является функционал $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$; гамильтониан H определяется равенством

$$H(t, x, s) = \min_{u \in P} (\langle s, f(t, x, u) \rangle + \chi(t, x, u)), \quad t \in [0, T], \quad x, s \in \mathbb{R}^n,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$; величины $\partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$, $\nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ представляют собой коинвариантные (си-) производные порядка α функционала φ в точке $(t, w(\cdot))$. Данные производные определяются соотношением (см., например, [4, 5], а также [3])

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, x_\tau(\cdot)) - \varphi(t, w(\cdot)) &= \partial_t^\alpha \varphi(t, w(\cdot))(\tau - t) + \\ &+ \int_t^\tau \langle \nabla^\alpha \varphi(t, w(\cdot)), ({}^C D^\alpha x)(\xi) \rangle d\xi + o(\tau - t), \quad \tau \in (t, T), \end{aligned} \quad (6)$$

которое должно выполняться для всех функции $x(\cdot) \in AC^\alpha[0, T]$, удовлетворяющих условию (2). В соотношении (6) величина $o(\cdot)$ может зависеть от $x(\cdot)$ и $o(\tau - t)/(\tau - t) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow t + 0$.

В [3] доказано, что если функционал цены $\rho: G \rightarrow \mathbb{R}$ является си-гладким порядка α (т.е. ρ непрерывен вместе с его си-производными порядка α), то он удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби (5). С другой стороны, если некоторый си-гладкий порядка α функционал $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (5) и краевому условию

$$\varphi(T, w(\cdot)) = \sigma(w(T)), \quad w(\cdot) \in AC^\alpha[0, T], \quad (7)$$

то он совпадает с функционалом цены ρ .

Однако, как правило, функционал цены ρ в задаче (1)–(3) не является си-гладким порядка α и не может рассматриваться как решение задачи Коши (5), (7) в классическом смысле, что приводит к необходимости изучения обобщенных решений этой задачи Коши.

В рамках данного направления исследований получены следующие основные результаты. Введено понятие минимаксного (в смысле [6]) решения задачи Коши (5), (7). Доказаны [7] теоремы о существовании и единственности минимаксного решения, о согласованности минимаксного и классического решений. Установлена [8] связь между функционалом цены ρ в задаче оптимального управления (1)–(3) и минимаксным решением соответствующей задачи Коши (5), (7), при

этом указан способ построения оптимальных стратегий управления по принципу обратной связи с памятью истории движения. Кроме того, дано определение вязкостного (в смысле [9]) решения задачи Коши (5), (7). Доказана [10] теорема о единственности вязкостного решения, которая, в частности, позволяет установить совпадение минимаксного и вязкостного решений.

Список литературы

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. *Diethelm K.* The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010.
3. *Gomoyunov M.I.* Dynamic programming principle and Hamilton–Jacobi–Bellman equations for fractional-order systems // SIAM J. Control Optim. 2020. V. 58, No. 6. P. 3185–3211.
4. *Kim A.V.* Functional differential equations. Application of i -smooth calculus. Dordrecht: Springer, 1999.
5. *Лукоянов Н.Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона–Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011.
6. *Subbotin A.I.* Generalized solutions of first order PDEs: The dynamical optimization perspective. Basel: Birkhäuser, 1995.
7. *Gomoyunov M.I.* Minimax solutions of Hamilton–Jacobi equations with fractional coinvariant derivatives // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2022. V. 28. Pap. 23.
8. *Gomoyunov M.I.* Differential games for fractional-order systems: Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation and optimal feedback strategies // Mathematics. 2021. V. 9, No. 14. Pap. 1667.
9. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277, No 1. P. 1–42.
10. *Gomoyunov M.I.* On viscosity solutions of path-dependent Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equations for fractional-order systems. Preprint, arXiv:2109.02451.