

СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СМЕШАННОГО ОТБОРА РАСПРЕДЕЛЕННОГО РЕСУРСА*

А. А. Давыдов, Е. В. Винников

МГУ им. М.В. Ломоносова & НИТУ “МИСИС”, Москва, Россия

davydov@mi-ras.ru, evinnikov@gmail.com

Модели типа уравнения Колмогорова–Пискунова–Петровского–Фишера появились в первой половине прошлого века в связи с возникшими потребностями анализа эволюции распределенных популяций или любого распределенного возобновляемого ресурса, в динамике которых следует учитывать диффузию [6, 7]. Задачи анализа влияния на эту динамику эксплуатации ресурса в контексте или извлечения максимального дохода, или сохранения биоразнообразия в случае популяций только усилили интерес к этой тематике.

Мы рассматриваем это уравнение в дивергентной форме

$$p_t = (\alpha(x)p_x)_x + a(x)p - b(x)p^2, \quad (1)$$

где $p = p(x, t)$ — плотность ресурса в точке x области его распределения в момент времени t , а функции α , a и b характеризуют диффузию ресурса, показатели его возобновления и насыщения им среды соответственно. Эти показатели непрерывно зависят от точки этой области, но не зависят от времени. Область распределения ресурса будем считать n -мерным тором, показатель насыщения b положительным и отделенным от нуля некоторой константой $b_0 > 0$, а матрицу α положительно определенной с элементами, имеющими производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с некоторым положительным показателем. Такие условия наложены на показатели насыщения и диффузии в работе [4], некоторые утверждения из которой используются при доказательстве результатов.

Эксплуатация ресурса состоит в постоянном и импульсном отборе его плотности. Первый из них добавляет в правую часть уравнения (1) слагаемое $-u(x)p$ с измеримым управлением u , удовлетворяющим ограничению $0 \leq U_1(x) \leq u(x) \leq U_2(x)$ с некоторыми измеримыми ограниченными функциями U_1 и U_2 , $U_1 \neq U_2$, — *ограничениями* на управление. Импульсный отбор происходит периодически, при нем в ареале распределяется имеющееся усилие E для отбора ресурса или его часть с измеримой плотностью $r = r(x)$ (= *плотность усилия*), которая всюду на торе удовлетворяет условию $R_1(x) \leq r(x) \leq R_2(x)$ с некоторыми неотрицательными ограниченными измеримыми функциями R_1, R_2 , $R_1 \neq R_2$. Такие плотности усилия (или управления выше) называются *допустимыми*. Отметим, что $\int_{\mathbb{T}^n} r(x) dx \leq E$. После выбора допустимой плотности усилия r с периодом $T > 0$ отбирается доля ресурса $q(x) = 1 - e^{-\gamma(x)r(x)}$, где неотрицательная непрерывная (или измеримая) функция γ отвечает за возможную сложность обнаружения или извлечения ресурса в точке.

После очередного импульсного отбора эволюция плотности ресурса до следующего отбора доставляется решением задачи Коши для изучаемого уравнения (1) при постоянном отборе с начальными данными — оставшейся частью плотности

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 19-11-00223)

ресурса после импульсного отбора. Учитывая, что эти начальные данные, вообще говоря, лишь измеримы, как и коэффициенты a , b и управление u , возникает естественный вопрос определения этого решения и его связи с начальными условиями. Под таким решением будем понимать функцию, лежащую в $W_2^{1,0}(\mathbb{T}^n \times (0, \tau))$ при любом конечном $\tau > 0$ и удовлетворяющую равенству

$$\int_{Q_\infty} (-p\eta_t + \alpha_{i,j} p_{x_i} \eta_{x_j}) dx dt - \int_{\mathbb{T}^n} p\eta|_{t=0} dx = \int_{Q_\infty} [(a-u)p - bp^2]\eta dx dt, \quad (2)$$

где $Q_T = \mathbb{T}^n \times (0, \infty)$, для любой дифференцируемой функции η с ограниченным носителем (см. [3, гл. I, формула (3.2₃)]).

Целью непрерывного и импульсного отборов является получение максимального среднего временного дохода в натуральном виде, т.е. если к моменту τ эти отборы дали такой доход объемов соответственно $P_u(\tau)$ и $P_r(\tau)$, то нужно решить задачу оптимизации

$$\overline{\lim}_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} (P_u(\tau) + P_r(\tau)) \rightarrow \max, \quad (3)$$

выбирая *допустимую стратегию отбора* — пару из допустимых управления и плотности усилия. Решение такой задачи доставляет оптимальную эксплуатацию ресурса в долгосрочной перспективе.

Мы показываем, что существует допустимая стратегия отбора, доставляющая решение задачи (3) при подходящей начальной плотности популяции. Такую стратегию будем называть *оптимальной*. Этот результат аналогичен полученным в [1, 2, 5], но отличается от них смешанной формой отбора и, как следствие этого, постановкой задачи.

В условиях, наложенных на коэффициенты уравнения (1), любое решение этого уравнения с ненулевыми неотрицательными начальными данными ограничено и при $t \rightarrow \infty$ равномерно по тору стремится к предельному стационарному распределению $p_\infty = p_\infty(x)$, либо нулевому, либо положительному [4]. Появление постоянного допустимого отбора сохраняет это свойство решений [5], только предельное стационарное распределение будет зависеть от выбора допустимого управления u , т.е. $p_\infty = p_{\infty,u}(x)$. Учитывая, что в силу неотрицательности рассматриваемых решений и неотрицательности допустимого управления решения для уравнения без постоянного отбора являются суперрешениями для уравнения с таким отбором, всюду на торе имеем $p_{\infty,u}(x) \leq p_\infty(x)$.

Предложение 1. Для любой допустимой стратегии отбора и любого неотрицательного начального распределения ресурса значение функционала в (3) корректно определено и не превосходит $\int_{\mathbb{T}^n} p_\infty(x)[u(x) + q(x)/T] dx$.

Замечание 1. В последней оценке функцию p_∞ можно заменить на константу $M = \max_{x \in \mathbb{T}^n} p_\infty(x)$, которую несложно оценить. Действительно, распределение p_∞ почти всюду должно иметь вторую производную и удовлетворять уравнению $(\alpha(x)p_x)_x = -a(x)p + b(x)p^2$, правая часть которого положительна для достаточно больших значений p . Следовательно, максимумы распределения p_∞ не могут принимать таких значений в силу положительной определенности α . Таким образом, для оценки значения M достаточно потребовать положительности правой части этого уравнения при $p = M$, что дает следующее подходящее M :

$$M := \max_{x \in \mathbb{T}^n} \frac{|a(x) - U_1(x)|}{b_0}.$$

В силу предложения 1 и замечания 1 множество значений функционала в (3) по всем допустим стратегиям отбора ограничено. Следовательно, есть точная верхняя грань $F_{\max}$ этих значений.

Теорема. *Существует допустимая стратегия отбора, доставляющая значение $F_{\max}$ функционала в (3), если начальное распределение ресурса не меньше его предельного распределения r_{∞} без постоянного и импульсного отборов.*

Список литературы

1. *Беляков А.О., Давыдов А.А.* Оптимальный циклический сбор распределенного возобновляемого ресурса с диффузией // Тр. МИАН. 2021. Т. 315. С. 64–73.
2. *Давыдов А.А., Мельник Д.А.* Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с импульсным отбором // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 99–107.
3. *Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н., Солонников В.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967
4. *Berestycki H., Francois H., Roques L.* Analysis of the periodically fragmented environment model. I: Species persistence // J. Math. Biol. 2005. V. 51, No. 1. P. 75–113.
5. *Davydov A.A.* Optimal steady state of distributed population in periodic environment // AIP Conf. Proc. 2021. V. 2333. Pap. 120007.
6. *Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. V. 7, No. 4. P. 353–369.
7. *Kolmogorov A.N., Petrovskii I.G., Piskunov N.S.* A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem // Bull. Moscow Univ., Math. Mech. 1937. V. 1. P. 1–25.