

О НЕОБХОДИМОСТИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ
ПРИНЦИПА МАКСИМУМА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Д. В. Хлопин

*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Екатеринбург, Россия*

khlopin@imm.uran.ru

Рассмотрим задачу управления на бесконечном промежутке

$$\min \int_0^\infty f_0(\tau, y(\tau), u(\tau)) d\tau,$$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad y(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m.$$

Будем предполагать, что множество U замкнуто в некотором конечномерном евклидовом пространстве, а отображения $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $f_0: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times U \rightarrow \mathbb{R}$ (и их производные по x) являются непрерывными по (x, u) и борелевскими по t . Для простоты формулировки для каждого борелевского управления $u \in B(\mathbb{R}_+; U)$ предположим также, что для некоторой локально суммируемой функции $C_u \in B(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ выражение $C_u(t)(1 + \|x\|)$ при всех (t, x) не меньше суммы

$$\|f(t, x, u(t))\|^2 + |f_0(t, x, u(t))|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u(t)) \right\|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, u(t)) \right\|^2.$$

Тогда с каждым условием $y(0) = \bar{x}$ векторное поле $(t, x) \mapsto f(t, x, u(t))$ порождает единственное (на $\mathbb{R}_+$) решение $y(\bar{x}, u; \cdot)$, а с ним и функционал

$$J(\bar{x}, u; \theta) = \int_0^\theta f_0(t, y(\bar{x}, u; t), u(t)) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in B(\mathbb{R}_+; U), \quad \theta \in \mathbb{R}_+.$$

Введем также для всех $(x, \psi, u, \lambda, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m,*} \times U \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ функцию Гамильтона—Понтрягина

$$H(x, \psi, u, \lambda, t) = \psi f(t, x, u) - \lambda f_0(t, x, u).$$

Теорема. Пусть управление $\hat{u} \in B(\mathbb{R}_+; U)$ слабо обгоняюще оптимально:

$$\limsup_{\theta \uparrow \infty} [J(x_0, u; \theta) - J(x_0, \hat{u}; \theta)] \geq 0 \quad \forall u \in B(\mathbb{R}_+, U).$$

Тогда найдется ненулевая пара $(\psi, \lambda) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{m,*}) \times \{0, 1\}$, удовлетворяющая условию максимизации гамильтониана

$$\sup_{v \in U} H(y(x_0, \hat{u}; t), \psi(t), v, \lambda, t) = H(y(x_0, \hat{u}; t), \psi(t), \hat{u}(t), \lambda, t)$$

и сопряженной системе

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(y(x_0, \hat{u}; t), \psi(t), \hat{u}(t), \lambda, t)$$

для почти всех t , а также краевому условию

$$-\psi(0) \in \text{co} \limsup_{\substack{\theta_n \uparrow \infty, x_n \rightarrow x_0, \lambda_n \downarrow \lambda \\ J(x_n, \hat{u}; \theta_n) - J(x_0, \hat{u}; \theta_n) \rightarrow 0}} \left\{ \lambda_n \frac{\partial J}{\partial x}(x_n, \hat{u}; \theta_n) \right\}. \quad (1)$$

Если управление $\hat{u}$ также обгоняюще оптимально, т.е.

$$\liminf_{\theta \uparrow \infty} [J(x_0, u; \theta) - J(x_0, \hat{u}; \theta)] \geq 0 \quad \forall u \in B(\mathbb{R}_+, U),$$

то вместо краевого условия (1) можно взять более сильное условие

$$-\psi(0) \in \bigcap_{\{(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \mid \theta_n \uparrow \infty\}} \limsup_{\substack{x_n \rightarrow x_0, \lambda_n \downarrow \lambda \\ J(x_n, \hat{u}; \theta_n) - J(x_0, \hat{u}; \theta_n) \rightarrow 0}} \left\{ \lambda_n \frac{\partial J}{\partial x}(x_n, \hat{u}; \theta_n) \right\}. \quad (2)$$

Принцип максимума Понтрягина как необходимое условие для задач на бесконечном промежутке хорошо известен и был показан уже в [1], для максимальной общей постановки см. [2]. Однако подбор для него в качестве необходимого условия краевого условия на сопряженную переменную обычно затруднен и опирается на какие-либо априорные асимптотические предположения (см. [3]). Условия (1) и (2) не имеют этого недостатка. Тем не менее в указанном выше виде их проверка неудобна. Приведем их геометрическую интерпретацию для случая $\lambda = 1$.

Рассмотрим последовательность моментов времени $\theta_n \uparrow \infty$. Совместно решая исходную и сопряженную системы с $\lambda = 1$ и $u = \hat{u}$, подберем все последовательности (y_n, ψ_n) , точно удовлетворяющие условию $\psi_n(\theta_n) = 0$, и все точнее условиям $y_n(0) \approx x_0$, $J(y_n(0), \hat{u}; \theta_n) \approx J(x_0, \hat{u}; \theta_n)$. Наберем все пределы таких ψ_n . Среди них в случае обгоняющего критерия найдется ψ из теоремы при любой $\theta_n \uparrow \infty$. Для слабо обгоняющего критерия нужно собрать пределы таких $\psi_n(0)$ для всех $\theta_n \uparrow \infty$ в общее множество и искать $\psi(0)$ в его выпуклой оболочке. Отметим, что, хотя эта выпуклая оболочка может оказаться очень большой, ее нельзя уменьшить без дополнительных предположений (см., например, [4]), ни одну из ее точек нельзя убрать без потери условием (1) своей необходимости.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons // Econometrica. 1974. V. 42. P.267–272.
3. Асеев С.М., Вельов В.М. Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // УМН. Т. 74, № 6. С. 3–54.
4. Khlopin D.V. Necessary conditions in infinite-horizon control problem that need no asymptotic assumptions: Preprint, arXiv: 1910.12092.