

СИСТЕМЫ ШЛЕЗИНГЕРА С БАЗИСОМ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В. П. Лексин

Государственный социально-гуманитарный университет, Коломна, Россия
lexin_vp@mail.ru

Рассмотрим набор функциональных квадратных комплекснозначных матриц $B_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, размера p , определенных в окрестности

$$U \subset \mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \mid z_i - z_j = 0\}$$

некоторой точки $z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0) \in U$ комплексного линейного пространства $\mathbb{C}^n$. Мы будем исследовать решения системы Шлезингера

$$dB_i(z) = - \sum_{j=1, j \neq i}^n [B_i(z), B_j(z)] \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} \quad (1)$$

с некоторыми начальными условиями $B_i(z^0) = B_i^0$. Здесь $[B_i, B_j] = B_i B_j - B_j B_i$ — обычные коммутаторы матриц, а $d(z_i - z_j)/(z_i - z_j)$, $1 \leq i < j \leq n$, — мероморфные дифференциальные 1-формы на $\mathbb{C}^n$. Системы Шлезингера (1) являются нелинейными матричными системами уравнений Пфаффа. Хорошо известно [1–3], что система (1) является вполне интегрируемой системой Пфаффа в окрестности U точки z^0 и любое ее решение $(B_1(z), B_2(z), \dots, B_n(z))$ мероморфно продолжается на все универсальное накрытие дополнения $\mathbb{C}_*^n$. Также хорошо известно, что при $p = 2$ и $n = 4$ решение систем Шлезингера [1] в классе матриц с нулевым следом сводится к решению уравнения Пенлеве VI (которое, в свою очередь, можно свести при подходящих параметрах к любому из уравнений Пенлеве I–V, и потому при $p = 2$ и $n = 4$ в общем случае решение уравнения Шлезингера выражается через трансцендентные Пенлеве). Трансцендентные Пенлеве входят в более сложный класс функций с точки зрения теории Галуа [4], чем гипергеометрические функции. Мы укажем некоторые условия на класс матриц $B_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, в котором будем решать системы Шлезингера, когда трансцендентные Пенлеве не появляются в решениях. А именно будет описана редукция систем Шлезингера к линейным системам, которые имеют решения не сложнее с точки зрения теории Галуа, чем гипергеометрические функции. Все сказанное выше суммируется в следующем утверждении.

Теорема 1. *Рассмотрим систему Шлезингера в классе верхнетреугольных матриц $B_i(z) = (b_i^{rs}(z))$, $b_i^{rs}(z) = 0$, $r > s$, $i = 1, 2, \dots, n$, с постоянными диагональными элементами $b_i^{kk}(z) = \lambda_i^k$. Пусть для каждого i диагональные элементы λ_i^k образуют арифметическую прогрессию с одной и той же разностью Δ для всех i . Тогда в классе таких матриц*

1) *система Шлезингера (1) редуцируется к набору линейных систем Пфаффа*

$$db_i^{rs}(z) = (s - r)\Delta \sum_{j=1, j \neq i}^n (b_i^{rs}(z) - b_j^{rs}(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}; \quad (2)$$

2) редуцированная система (2) имеет базис решений, представленный гипергеометрическими интегралами

$$b_i^{rs}(z) = \beta_i \int_{\gamma_j} \prod_{k=1}^n (t - z_k)^{\beta_i^{rs}} \frac{dt}{t - z_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где параметры β_i^{rs} имеют значения $\beta_1^{rs} = \dots = \beta_n^{rs} = (s - r)\Delta$, а петли γ_j в плоскости комплексной переменной t , по которой ведется интегрирование, выбираются таким образом, чтобы они не проходили через точки z_i , $i = 1, \dots, n$, и чтобы подынтегральное выражение было однозначным (например, петли Похгаммера).

Список литературы

1. *Боллбрух А.А.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. М: МЦНМО, 2009.
2. *Dragovich V., Gontsov R.R., Schramchenko V.* Triangular Schlesinger systems and superelliptic curves // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2021. V. 424. Pap. 132947.
3. *Лексин В.П.* Многомерные системы Жордана–Похгаммера и их приложения // *Тр. МИАН*. 2012. Т. 278. С. 138–147.
4. *Umemura H.* Invitation to Galois theory // *Differential equations and quantum groups* / ed. by D. Bertrand et al. EMS, 2007.