

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ ТОЧЕК В ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ*

В. Р. Барсегян^a, С. В. Солодуша^{b,c}

^a*Институт механики НАН Армении, Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*

^b*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия*

^c*Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия*

`barseghyan@sci.am, solodusha@isem.irk.ru`

Задачи управления и оптимального управления колебательными процессами, описываемые волновыми уравнениями, имеют значительный теоретический интерес и возрастающее практическое значение [1–5]. Моделирование динамических систем с промежуточными условиями и управление ими являются активно развиваемым направлением в современной теории управления [3–6]. Задачам управления и оптимального управления разнородных распределенных систем посвящена, в частности, работа [2]. В этой работе (и других работах того же автора и его учеников) введены и изучены формулы типа Даламбера. Это научное направление пока еще недостаточно исследовано.

В данной работе исследуется задача оптимального граничного управления для одномерного волнового уравнения, состоящего из двух разнородных участков. При этом предполагается, что время прохождения волны по каждому из участков одинаково. Управление осуществляется смещением одного конца при закрепленном другом конце с заданными начальными, конечными условиями и заданным значением скоростей точек системы в промежуточный момент времени. Критерий качества задан на всем промежутке времени. Предложен подход аналитического построения оптимального граничного управления.

Рассмотрена задача оптимального граничного управления кусочно однородной колебательной системой (состоящей из двух участков $-l_1 \leq x \leq 0$ и $0 \leq x \leq l$) с заданной скоростью точек в промежуточный момент времени.

Пусть состояние (продольные колебания) стержня (или поперечные колебания струны) описывается функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, а отклонение от состояния равновесия подчиняется следующему волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$Q(-l_1, t) = u(t), \quad Q(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

*Исследование С.В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема AAAA-A21-121012090034-3).

и с условиями сопряжения в точке $x = 0$ соединения участков

$$Q(0 - 0, t) = Q(0 + 0, t), \quad a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0}, \quad (3)$$

где $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$ — скорость прохождения волны по участкам, $\rho_i = \text{const}$ — плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга, $i = 1, 2$. Предполагается, что длины l_1 и l участков выбраны так, что время прохождения волны по участку $-l_1 \leq x \leq 0$ совпадает с временем прохождения волны по участку $0 \leq x \leq l$, т.е. $a_2 l_1 = a_1 l$.

Пусть заданы начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (5)$$

Пусть также в некоторый промежуточный момент времени t_1 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$) задано промежуточное значение скоростей точек в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_{t=t_1} = \psi_1(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (6)$$

В формуле (2) функция $u(t)$ — управляющее воздействие (граничное управление). Предполагается, что $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, где $\Omega_T = \{(x, t): x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, и $\varphi_0(x), \varphi_T(x) \in C^2[-l_1, l]$, $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_T(x) \in C^1[-l_1, l]$. Предполагается также, что все функции таковы, что выполняются условия согласования [3, 4].

Требуется найти такое оптимальное управление $u^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, под воздействием которого колебательное движение системы (1) из заданного начального состояния (4) переходит в конечное состояние (5) и которое обеспечивает выполнение условия (6) и минимизирует функционал

$$\int_0^T u^2(t) dt. \quad (7)$$

Для решения задачи переходим к новой переменной ξ , что приводит к сжатию или растяжению отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. При этом отрезок $-l_1 \leq x \leq 0$ переходит в отрезок $-l \leq \xi \leq 0$. Для функции $Q(\xi, t)$ получим на отрезках равной длины одинаковые уравнения с соответствующими условиями для (3)–(6) относительно новой переменной. Решение исходной задачи сведено к задаче оптимального управления колебательным движением, описываемым неоднородным уравнением с нулевыми граничными условиями и минимизируемым функционалом (7).

Используя метод разделения переменных и учитывая промежуточные и конечные условия, применяя подходы, приведенные в работах [3, 4, 6], получаем, что искомая функция управления $u^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, для каждой гармоники должна удовлетворять некоторым интегральным соотношениям и доставлять минимум функционалу (7). Далее на основе метода проблем моментов [6, 7] для произвольного числа первых гармоник построено аналитическое выражение для искомого оптимального граничного управления и соответствующей функции состояния.

Список литературы

1. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
2. *Ильин В.А.* Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков // ДАН. 2011. Т. 440, №2. С. 159–163.
3. *Barseghyan V., Solodusha S.* Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time // Mathematical optimization theory and operations research. Cham: Springer, 2021. P. 299–313. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 12755).
4. *Barseghyan V.R., Solodusha S.V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 1847. Pap. 012016.
5. *Корзюк В.И., Козловская И.С.* Двухточечная граничная задача для уравнения колебания струны с заданной скоростью в некоторый момент времени. II // Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 1. С. 62–70.
6. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.
7. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.