

ЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

И. С. Кащенко

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия*

iliyask@uniyar.ac.ru

Рассмотрим сингулярно возмущенное уравнение второго порядка с запаздыванием

$$\varepsilon^2 \ddot{x} + \sigma(\varepsilon) \dot{x} + k(\varepsilon)x = f(x(t - \tau(x)), \dot{x}(t - \tau(x)), \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}$, f и $\tau \geq 0$ — достаточно гладкие функции. Пусть $f(0, 0) = 0$, тогда $x \equiv 0$ является состоянием равновесия. Рассмотрим некоторую малую (но не зависящую от ε) окрестность нуля. Пусть для всех x из этой окрестности $\tau(x)$ ограничена постоянной M : $0 \leq \tau(x) \leq M$.

Поставим задачу исследовать поведение решений уравнения (1) в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля в фазовом пространстве $C^2_{[-M, 0]}$ при достаточно малых ε .

Отметим, что уравнение (1) получается из уравнения с большим запаздыванием

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = g(x(t - T\tau(x)), \dot{x}(t - T\tau(x))), \quad T \gg 1.$$

Тогда $\varepsilon = T^{-1}$, $\sigma(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}a$, $k(\varepsilon) = b$, $f(x, y, \varepsilon) = g(x, \sqrt{\varepsilon}y)$.

В случае, когда запаздывание постоянно $\tau(x) \equiv T$, задача обсуждалась в [1], а в случае, когда дополнительно $f(x, y, \varepsilon) = f(x, \varepsilon)$, — в [2]. Некоторые результаты для случая, когда запаздывание зависит от искомой функции (state-dependent delay), изложены в [3].

В случае, когда все точки спектра линеаризованной задачи лежат слева от мнимой оси (и отделены от нее), при достаточно малых ε динамика тривиальна: все решения стремятся к нулю. Если при достаточно малых ε хотя бы одна точка спектра имеет положительную (и отделенную от нуля) вещественную часть, динамика становится нелокальной: в окрестности состояния равновесия нет устойчивых решений. Во всех остальных случаях существуют точки спектра, расположенные сколь угодно близко к мнимой оси. Наибольший интерес представляют ситуации, в которых количество таких точек сколь угодно велико. Будем говорить, что такие критические случаи имеют бесконечную размерность.

В критических случаях построены специальные нелинейные уравнения — нормальные и квазинормальные формы, которые не зависят от малого параметра либо зависят от него регулярно. Их решения определяют главные части асимптотического приближения решений уравнения (1).

Список литературы

1. Кащенко И.С. Локальная динамика дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием у первой производной // Мат. заметки. 2017. Т. 101, №2. С. 318–320.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 21-71-30011).

2. *Кащенко С.А.* Уравнение Гинзбурга–Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием // ЖВМиМФ. 1998. Т. 38, № 3. С. 457–465.
3. *Голубенец В.О., Кащенко И.С.* Локальная динамика сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с запаздыванием, зависящим от состояния // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 5. С. 795–799.