

# ПОСТРОЕНИЕ НОРМ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Асият Мусаева

МГУ, Москва, Россия

asya.musaeva2001@mail.ru

Линейной системой с переключениями называется дифференциальное уравнение  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$  с начальным условием  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , в котором матрица  $A(t)$  является управляемым параметром, принимающим произвольные значения из заданного компактного множества управления  $\mathcal{A}$ . *Функция управления*, или *правило переключений* (switching law), — это произвольная измеримая функция  $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{A}$ . Линейные системы с переключениями возникают в задачах электроники, механики, робототехники, планирования, и т.д. [1]. Один из главных вопросов — максимальный рост траекторий системы и ее устойчивость. *Показателем Ляпунова*  $\sigma(\mathcal{A})$  системы называется инфимум чисел  $\alpha$ , для которых  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq Ce^{\alpha t}\|\mathbf{x}_0\|$ ,  $t \in [0, +\infty)$ . Таким образом, самый быстрый рост траектории имеет порядок  $Ce^{\sigma t}$ ,  $t \rightarrow \infty$ . Система называется *асимптотически устойчивой*, если все ее траектории стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Известно [2], что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда  $\sigma < 0$ .

В литературе известно множество методов исследования устойчивости. Одним из наиболее эффективных является метод *инвариантных норм Ляпунова*. Инвариантная норма обладает следующим характеристическим свойством:  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq e^{\sigma t}\|\mathbf{x}_0\|$  для любой траектории  $\mathbf{x}(t)$ , и при этом для любой точки  $\mathbf{x}_0$  существует траектория  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  такая, что  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$  и  $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = e^{\sigma t}\|\mathbf{x}_0\|$ . Н. Барабанов [3] доказал, что для любой неприводимой системы с выпуклым множеством управления  $\mathcal{A}$  инвариантная норма Ляпунова существует. Однако ее построение — чрезвычайно сложная задача (см. подробнее [4]). Мы исследуем случай малых размерностей и представляем полное решение данной задачи для  $d = 2$ . Оказывается, что для двумерных систем можно не только эффективно вычислять показатель Ляпунова, но и строить норму Ляпунова в явном виде. Мы также получаем полную классификацию норм Ляпунова для двумерных систем. Интересно, что в некоторых случаях инвариантные нормы неединственны, что подчеркивает разницу с дискретными системами [5]. Будет представлен алгоритм вычисления инвариантной нормы для произвольных систем с конечным множеством управления.

## Список литературы

1. Liberzon D. Switching in systems and control // Systems & Control: Foundations & Applications. Boston: Birkhäuser, 2003.
2. Molchanov A.P., Pyatnitskiy Y.S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory // Syst. Control Lett. 1989. V. 13, No. 1. P. 59–64.
3. Barabanov N.E. Absolute characteristic exponent of a class of linear nonstationary systems of differential equations // Sib. Math. J. 1988. V. 29. P. 521–530.
4. Guglielmi N., Laglia L., Protasov V. Yu. Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS // Found. Comput. Math. 2017. V. 17, No. 2. P. 567–623.

5. *Protasov V. Yu.* The Barabanov norm is generically unique, simple, and easily computed  
// SIAM J. Optim. Control. 2022 (in press); arXiv: 2109.12159.