

НЕВЫПУКЛЫЙ И ВЫПУКЛЫЙ ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РЕКОНСТРУКЦИИ УПРАВЛЕНИЙ*

Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников

ИММ УрО РАН, УрФУ, Екатеринбург, Россия

subb@uran.ru, krupennikov@imm.uran.ru

В докладе обсуждается новый метод решения задачи динамической реконструкции управлений (ЗДРУ) для динамических управляемых систем. Под ЗДРУ понимается задача построения аппроксимаций неизвестного управления по неточным дискретным замерам наблюдаемой траектории динамической системы, которая порождается этим управлением (так называемой базовой траектории).

ЗДРУ относится к обратным задачам теории управления. Эти задачи актуальны для многих современных прикладных областей науки. К настоящему времени разработаны разнообразные подходы к решению обратных задач, основанные на алгебраических, итерационных, вариационных и других методах (см., например, обзорные статьи [1, 2]).

В докладе рассматриваются детерминированные управляемые системы, аффинные по управлениям. Допустимые управления — измеримые функции, значения которых ограничены известным выпуклым компактом.

Заметим, что задача реконструкции неизвестного управления некорректна, так как одна и та же базовая траектория может порождаться не единственным допустимым управлением. Поэтому вводится понятие нормального управления — управления, порождающего базовую траекторию и имеющего минимальную норму в пространстве L^2 . Показано [3], что при типичных предположениях о входных данных для любой траектории, порожденной допустимым управлением, существует единственное нормальное управление. Под ЗДРУ подразумевается задача реконструкции именно нормального управления.

Предложенный авторами доклада новый подход [3–5] к решению ЗДРУ опирается на вспомогательные вариационные задачи на минимум регуляризованного [6] интегрального функционала невязки. Отличительная особенность подхода — использование невыпуклых (выпукло-вогнутых) функционалов. При этом во вспомогательных вариационных задачах ищутся лишь стационарные точки функционалов, а не экстремум.

На основе этого подхода разработан и обоснован [4, 5] алгоритм, позволяющий строить аппроксимации неизвестного управления, сходящиеся к нормальному при условии выполнения определенных условий согласования параметров аппроксимации. Эффективность алгоритма обусловлена сведением решения ЗДРУ к интегрированию линейных ОДУ.

В докладе предлагается сравнение нового подхода к решению ЗДРУ со схожим, который базируется на вспомогательных вариационных задачах на экстремум выпуклого функционала.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00362).

Постановка ЗДРУ. Наблюдается некоторая траектория $x^*(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (базовая траектория) динамической управляемой системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad m \geq n, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(\cdot)$ — вектор фазовых переменных, $u(\cdot)$ — вектор управлений, $T < \infty$, U — выпуклый компакт. Базовая траектория порождается неизвестным допустимым управлением.

Роль входных данных в ЗДРУ играют неточные дискретные замеры базовой траектории

$$\left\{ y_k^\delta, k = 0, \dots, N, N = \left\lceil \frac{T}{h^\delta} \right\rceil \right\}: \quad \|y_k^\delta - x^*(t_k)\| \leq \delta.$$

Они имеют погрешность $\delta > 0$ и поступают с шагом $h^\delta > 0$ в моменты времени $t_k = kh^\delta$, $k = 0, \dots, N$.

ЗДРУ ставится следующим образом: для полученных при определенных δ и h^δ наборов замеров $\{y_k^\delta\}$ построить измеримые равномерно ограниченные управления $u^\delta(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что при стремлении к нулю параметров δ и h^δ эти управления сходятся слабо со звездой к нормальному управлению $u^*(\cdot)$, а траектории системы (1), порожденные этими управлениями, сходятся равномерно к базовой траектории $x^*(\cdot)$.

В работах [4, 5] предложен пошаговый алгоритм решения ЗДРУ. На каждом шаге алгоритма (т. е. на отрезке времени $[t_{i-1}, t_i]$) используются вспомогательные конструкции из задачи на поиск стационарных точек невыпуклых функционалов

$$I(x_i(\cdot), u_i(\cdot)) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[-\frac{\|x_i(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u_i(t)\|^2}{2} \right] dt, \quad i = 1, \dots, N,$$

где i — номер шага алгоритма, α — малый регуляризирующий (по Тихонову [6]) параметр. Функция $y^\delta(t)$ является гладкой интерполяцией дискретных замеров.

В докладе рассматривается также “выпуклый” вариационный подход к решению ЗДРУ, который опирается на решение вспомогательных вариационных задач на минимум выпуклых функционалов

$$I(x_i(\cdot), u_i(\cdot)) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\frac{\|x_i(t) - y^\delta(t)\|^2}{2} + \frac{\alpha^2 \|u_i(t)\|^2}{2} \right] dt, \quad i = 1, \dots, N.$$

Приводится качественный и количественный анализ результатов применения этих подходов.

Список литературы

1. Vasin V.V. Methods for solving nonlinear ill-posed problems based on the Tikhonov-Lavrentiev regularization and iterative approximation // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2016. V. 4, No. 4. P. 60–73.
2. Schmitt U., Louis A.K. Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems. I: Theory // Inverse Problems. 2002. V. 18, No. 3. P. 645.
3. Subbotina N.N., Krupennikov E.A. Hamiltonian systems for dynamic control reconstruction problems // Minimax Theory Appl. 2020. V. 05, No. 2. P. 439–454.

4. *Субботина Н.Н, Крупенников Е.А.* Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 2. С. 208–220.
5. *Субботина Н.Н, Крупенников Е.А.* Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции // Тр. МИАН. 2021. Т. 315. С. 247–260.
6. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.