

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СБОРЕ РЕСУРСА ИЗ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ*

М. С. Волдеаб, Л. И. Родина

*Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,
Владимир, Россия*

Московский институт стали и сплавов, Москва, Россия

mebseb2018@gmail.com, LRodina67@mail.ru

Задачам оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными динамическими системами, посвящено множество работ ученых, начиная с прошлого века. В настоящее время ведутся активные исследования по изучению оптимального промысла и его влияния на характер динамики и состав структурированных популяций, рассматриваются задачи периодического импульсного сбора возобновляемого ресурса, задачи оптимальной эксплуатации популяции с диффузией, исследуется максимальная эффективность сбора и наибольшая выгода от эксплуатации (см. [1–3]).

Рассмотрим модель популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n: x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$, из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если $n \geq 2$, то ресурс $x \in \mathbb{R}_+^n$ является неоднородным, т.е. либо состоит из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. Отметим, что в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $u_i(k)$ обозначается доля ресурса i -го вида, извлеченного из популяции в момент kd .

Таким образом, рассматривается эксплуатируемая популяция, заданная управляемой системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= (1 - u_i(k))x_i(kd - 0), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что все решения системы $\dot{x} = f(x)$ являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях; для этого необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ удовлетворяли условию квазиположительности (см. [4, с. 34]).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00293).

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$, $C_i \geq 0$ — стоимость ресурса i -го вида. Средней временной выгодой от извлечения ресурса назовем функцию

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j).$$

Аналогично определим функцию $H^*(\bar{u}, x(0))$ с заменой нижнего предела на верхний, и если выполнено равенство $H_*(\bar{u}, x(0)) = H^*(\bar{u}, x(0))$, то определим предел

$$H(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j). \quad (2)$$

Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение системы $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Введем в рассмотрение функцию

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i)$$

в предположении, что для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$ решения $\varphi(t, x)$ существуют при $t \in [0, d]$.

Теорема 1. Пусть функция $D(x)$ достигает максимального значения в точке $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ и $x_i^* \leq \varphi_i(d, x^*) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq x_i^*$, $i = 1, \dots, n$, существует режим эксплуатации $\bar{u}^*$, при котором функция $H(\bar{u}, x(0))$ достигает наибольшего значения $H(\bar{u}^*, x(0)) = D(x^*)$.

Пусть $\bar{u}(k) \doteq (u(1), \dots, u(k))$, где $u(j) \in [0, 1]^n$, $j = 1, \dots, k$. Для любого $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим функцию

$$h(\bar{u}(k), x(0)) \doteq \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j),$$

равную стоимости ресурса, полученного за k изъятий.

Теорема 2. Пусть функция $D(x)$ достигает максимального значения в точке $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ и $x_i^* \leq \varphi_i(d, x^*)$ для любого $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq x_i^*$, $i = 1, \dots, n$, существует режим эксплуатации $\bar{u}^*(k)$, при котором функция $h(\bar{u}(k), x(0))$ достигает наибольшего значения

$$h(\bar{u}^*(k), x(0)) = (k - 1)D(x^*) + \sum_{i=1}^n C_i x_i(0).$$

Доказательство данных утверждений и построение режимов эксплуатации, при которых достигаются наибольшие значения функций $H(\bar{u}, x(0))$, $h(\bar{u}(k), x(0))$, приведены в [5]. Результаты исследования проиллюстрированы на примерах моделей взаимодействия двух видов, таких как конкуренция и симбиоз. Для этих моделей получены оценки, а в некоторых случаях точные значения функции $H(\bar{u}, x(0))$.

Список литературы

1. *Беляков А.О., Давыдов А.А.* Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 38–46.
2. *Егорова А.В., Родина Л.И.* Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 501–517.
3. *Давыдов А.А.* Существование оптимальных стационарных состояний эксплуатируемых популяций с диффузией // Тр. МИАН. 2020. Т. 310, № 2. С. 135–142.
4. *Кузенков О. А., Рябова Е. А.* Математическое моделирование процессов отбора. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2007.
5. *Волдеаб М.С., Родина Л.И.* О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Изв. вузов. Математика. 2022. № 1. С. 12–24.