

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДВУХ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ В ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ*

Н. Н. Петров

Удмуртский университет, Ижевск, Россия

kma3@list.ru

В задачах конфликтного управления наряду с методами, ориентированными на построение оптимальных стратегий [1], существуют подходы, нацеленные на гарантированный результат. К таким подходам относятся, в частности, метод Понтрягина [2] и метод разрешающих функций, позволяющий эффективно использовать технику многозначных отображений для получения необходимых результатов [3]. В данной работе метод разрешающих функций применяется к исследованию одной задачи конфликтного взаимодействия группы преследователей и двух убегающих.

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается, дифференциальная игра $\Gamma(n+2)$ $n+2$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и двух убегающих E_1, E_2 . Движение каждого преследователя P_i описывается системой

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in V, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \quad (1)$$

а закон движения каждого убегающего E_j , $j = 1, 2$, имеет вид

$$\dot{y}_j = A(t)y_j + v, \quad v \in V, \quad y_j(t_0) = y_j^0, \quad (2)$$

где $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ матричная функция порядка k . Здесь и далее $i \in I = \{1, \dots, n\}$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр, который для убегающих E_1, E_2 выбирает одно и то же управление $v(t)$.

Определение 1 [4]. Функция $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ называется *рекуррентной по Зубову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in \mathbb{R}^1$ существует $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которого справедливо неравенство

$$\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon.$$

Предположение 1. Фундаментальная матрица Φ системы $\dot{z} = A(t)z$, $z(t_0) = E$ является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.

Предысторией $v_t(\cdot)$ функции $v(\cdot)$ в момент t назовем сужение функции v на отрезок $[t_0, t]$.

Определение 2. Будем говорить, что задана *квазистратегия* $\hat{U}_i$ преследователя P_i , если определено отображение $\hat{U}_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания №075-01265-22-00, проект FEWS-2020-0010 и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-01-00293.

начальному состоянию $z^0 = (z_{ij}^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_i(\cdot)$ убегающих E_j измеримую функцию $u_i(t) = \widehat{U}_i(t, z^0, v_i(\cdot))$ со значениями в V .

Определение 3. В игре $\Gamma(n+2)$ происходит *поимка*, если существуют момент $T_0 = T(z^0)$ и квазистратегии $U_1, \dots, U_n$ преследователей $P_1, \dots, P_n$ такие, что для любой измеримой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, $t \in [t_0, T_0]$, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (а) найдутся номера $l, m \in I$ ($m \neq l$), $j \in \{1, 2\}$ и моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0]$ такие, что $x_l(\tau_1) = y_j(\tau_1)$, $x_m(\tau_2) = y_j(\tau_2)$;
- (б) найдутся номера $l, m \in I$ ($m \neq l$) и моменты $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T_0]$ такие, что $x_l(\tau_1) = y_1(\tau_1)$, $z_m(\tau_2) = y_2(\tau_2)$.

Замечание 1. Условие поимки означает, что либо два каких-то преследователя осуществляют поимку одного убегающего, либо один преследователь ловит одного убегающего, а второй — другого. Такая ситуация может возникнуть, если система состоит из двух блоков и для того, чтобы ее вывести из строя, нужно либо уничтожить один из блоков, либо повредить оба блока.

Обозначим через $\text{Int}X$ и $\text{co}X$ внутренность и выпуклую оболочку множества $X \subset \mathbb{R}^k$ соответственно.

Теорема. Пусть существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$, такое, что для всех $l \in I_0$

$$\text{Int co}\{x_i^0, i \in I_0, i \neq l\} \cap \text{co}\{y_1^0, y_2^0\} \neq \emptyset. \quad (3)$$

Тогда в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

Следствие 1. Пусть $A(t) = 0$ для всех $t \in [t_0, +\infty)$ и существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$, для которого выполнено условие (3). Тогда в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

В данном случае $\Phi(t) = E$ для всех $t \geq t_0$ и поэтому $\Phi(t)$ является рекуррентной.

Следствие 2. Пусть A — постоянная матрица, все собственные числа которой являются простыми и чисто мнимыми, и существует множество $I_0 \subset I$, $|I_0| = n - 2$, для которого выполнено условие (3). Тогда в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

Действительно, в данном случае фундаментальная матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной.

Пример. Определим множество $F = (0, 2\pi) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (2\pi n^2, 2\pi n^2 + 2\pi)$. Пусть в системах (1), (2) $t_0 = 0$ и матрица $A(t)$ имеет вид $A(t) = a(t)E$, где

$$a(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in F, \\ \sin t, & \text{если } t \notin F. \end{cases}$$

Тогда матрица $\Phi(t)$ является рекуррентной [5]. Поэтому, если начальные условия таковы, что выполнены условия теоремы, в игре $\Gamma(n+2)$ происходит поимка.

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2.
3. Чижрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
4. Zubov B.I. К теории рекуррентных функций // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 532–560.
5. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture of given number of evaders in linear recurrent differential games // J. Optim. Theory Appl. 2019. V. 182, No. 1. P. 417–429.