

ВОЗМУЩЕНИЯ НЕГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНОГО ТОРА*

В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”,
Нижний Новгород, Россия

vgrines@yandex.ru, dmitriimints@gmail.com, k.chilina@yandex.ru

Негиперболические алгебраические автоморфизмы двумерного тора не являются структурно устойчивыми отображениями, поэтому предсказать динамику сколь угодно малых возмущений таких отображений невозможно. В настоящем докладе приведены отображения, которые являются возмущениями негиперболических автоморфизмов двумерного тора посредством их суперпозиции с гомотопными тождественному градиентноподобными диффеоморфизмами. Показано, что полученные отображения являются структурно устойчивыми и их динамические свойства определяются свойствами возмущаемых автоморфизмов.

Пусть M^n — гладкое замкнутое связное ориентируемое n -многообразие ($n \geq 1$) и f — гомеоморфизм (диффеоморфизм) на M^n .

Пусть p — гиперболическая периодическая точка диффеоморфизма f . Обозначим через W_p^s и W_p^u устойчивое и неустойчивое многообразия точки p . Через Ω_f обозначим неблуждающее множество диффеоморфизма f .

Диффеоморфизм f называется диффеоморфизмом Морса–Смейла, если множество Ω_f конечно и гиперболично и многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых периодических точек $p, q \in \Omega_f$. Диффеоморфизм Морса–Смейла f называется градиентноподобным, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ для различных точек $p, q \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_p^u < \dim W_q^u$.

Если p, q — различные периодические седловые точки диффеоморфизма f , для которых $W_q^s \cap W_p^u \neq \emptyset$, то пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ называется гетероклиническим. В случае $\dim W_q^s \cap W_p^u = 0$ пересечение $W_q^s \cap W_p^u$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется гетероклинической точкой, а орбита гетероклинической точки называется гетероклинической орбитой.

Назовем гетероклиническим множеством диффеоморфизма f множество всех его гетероклинических точек.

Пусть $n = 2$, $f: M^2 \rightarrow M^2$ — диффеоморфизм Морса–Смейла и p — его седловая периодическая точка. Обозначим через $W_p^{\nu,i}$, $i \in \{1, 2\}$, $\nu \in \{u, s\}$, компоненты связности множества $W_p^\nu \setminus \{p\}$. Гетероклиническое множество диффеоморфизма f называется ориентируемым, если для каждой пары седловых периодических точек p, q и любых $i, j \in \{1, 2\}$, для которых $W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i} \neq \emptyset$, индекс пересечения кривых $W_p^{u,j}$ и $W_q^{s,i}$, один и тот же в любой точке $z \in W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i}$.

*Работа подготовлена в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы “Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)” в 2021–2022 гг., а также при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931).

Обозначим через $h_\varepsilon(z): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функцию, заданную формулой

$$h_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi z)\right), & z \in \left(k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}\right) \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ k + \frac{1}{2}, & z = k + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

где $\varepsilon \in (-1, 1)$.

Рассмотрим диффеоморфизмы M_ε и L_ε двумерного тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, зависящие от параметра $\varepsilon \in (-1, 1)$ и заданные формулами

$$M_\varepsilon: \begin{cases} \bar{x} = h_\varepsilon(x) \pmod{1}, \\ \bar{y} = h_\varepsilon(y) \pmod{1}, \end{cases} \quad L_\varepsilon: \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2} h_\varepsilon(2x) \pmod{1}, \\ \bar{y} = h_\varepsilon(y) \pmod{1}. \end{cases}$$

При $\varepsilon = 0$ отображения M_ε , L_ε являются тождественными, а при $\varepsilon \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ представляют собой градиентноподобные диффеоморфизмы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Gl}(2, \mathbb{Z})$, т.е. A — целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$. Тогда отображение $\hat{A}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$\hat{A}: \begin{cases} \bar{x} = ax + by \pmod{1}, \\ \bar{y} = cx + dy \pmod{1}, \end{cases}$$

называется алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.

Если собственные значения матрицы $A \in \operatorname{Gl}(2, \mathbb{Z})$ не равны по модулю единице, то алгебраический автоморфизм $\hat{A}$ называется гиперболическим. В противном случае автоморфизм $\hat{A}$ называется негиперболическим.

Следуя работам [1, Lemma 3] и [2, разд. 2], негиперболические алгебраические автоморфизмы двумерного тора классифицируем следующим образом.

Предложение. *Каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора посредством алгебраического автоморфизма задается в точности одной из следующих матриц:*

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Отличный от тождественного гомеоморфизм f замкнутой ориентируемой поверхности называется периодическим, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = \operatorname{id}$. Наименьшее из таких n называется периодом f .

Обозначим через $\operatorname{Per}_f(z)$ период точки $z \in M^2$ относительно f . Пусть f — гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности M^2 периода n . Положим $\mathcal{B}_f = \{z \in M^2 \mid \operatorname{Per}_f(z) < n\}$.

Пусть $f_{\varepsilon, A} = M_\varepsilon \circ \hat{A}$, $g_{\varepsilon, A} = L_\varepsilon \circ \hat{A}$, где $\hat{A}$ — автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей $A \in \operatorname{Gl}(2, \mathbb{Z})$.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) отображения $f_{\varepsilon, A_2(0)}$, f_{ε, A_5} являются сохраняющим ориентацию градиентноподобными диффеоморфизмами и $\Omega_{f_{\varepsilon, A_2(0)}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$, $\Omega_{f_{\varepsilon, A_5}} = \mathcal{B}_{\hat{A}_5}$;
- (2) отображение f_{ε, A_3} является меняющим ориентацию градиентноподобным диффеоморфизмом и $\Omega_{f_{\varepsilon, A_3}} \subset \mathcal{B}_{\hat{A}_3}$;
- (3) множество $\Omega_{f_{\varepsilon, A}}$ совпадает с множеством Ω_{M_ε} и $\text{Per}_{f_{\varepsilon, A}}(z) = \text{Per}_{\hat{A}}(z)$ для любого $z \in \Omega_{f_{\varepsilon, A}}$ и $A \in \{A_2(0), A_3, A_5\}$.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) при $m = 2l$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $f_{\varepsilon, A_1(m)}$ и $f_{\varepsilon, A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса–Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из m гетероклинических орбит;
- (2) при $m = 2l - 1$ ($l \in \mathbb{N}$) диффеоморфизмы $g_{\varepsilon, A_1(m)}$ и $g_{\varepsilon, A_2(m)}$ являются диффеоморфизмами Морса–Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством, состоящим из $4m$ гетероклинических орбит.

Список литературы

1. Batterson S. The dynamics of Morse–Smale diffeomorphisms on the torus // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 256. P. 395–403.
2. Сидоров С.В., Чилина Е.Е. О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // Журн. СВМО. 2021. Т. 23, №3. С. 295–307.