

НЕРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ*

С. А. Кащенко, А. О. Толбей

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия*

kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Рассматривается цепочка диффузионно связанных уравнений Ван-дер-Поля

$$\ddot{u}_j + a\dot{u}_j + u_j + \dot{u}_j u_j^2 = (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

$u_0 = u_N$, $u_{N+1} = u_1$. Значение $u_j(t)$ будем ассоциировать со значением функции двух переменных $u(t, x_j)$, где $x_1, \dots, x_N$ — равномерно распределенные на некоторой окружности точки с угловой координатой $x_j = 2\pi N^{-1}j$. Основное предположение состоит в том, что значение N достаточно велико, т.е.

$$\varepsilon = 2\pi N^{-1} \ll 1. \quad (2)$$

Нижне коэффициент a в (1) считаем однопорядковым с ε^2 : $a = \varepsilon^2 a_0$.

Условие (2) дает основание от дискретной модели (1) перейти к непрерывной по пространственной переменной x краевой задаче для $u = u(t, x)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial t} u^2 = d[u(t, x + \varepsilon) - 2u(t, x) + u(t, x - \varepsilon)], \quad (3)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (4)$$

Исследуем поведение решений этой краевой задачи с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Линеаризованная в нуле краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u = d[u(t, x + \varepsilon) - 2u(t, x) + u(t, x - \varepsilon)]. \quad (5)$$

Бесконечно много корней характеристического уравнения для (5)

$$\lambda^2 + \varepsilon^2 a_0 \lambda + 1 = -4 \sin^2 \frac{z}{2}, \quad z = \varepsilon k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

стремятся к мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому можно говорить, что для (3), (4) имеет место бесконечномерный критический случай.

Рассмотрим те решения, которые формируются на асимптотически больших модах, т.е. являются нерегулярными.

Фиксируем произвольно положительное значение $\delta \neq \pi n$ ($n = 1, 2, \dots$) и положим в (6) $k = \delta \varepsilon^{-1} + \theta + m$, где $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 1)$ дополняет до целого выражение $\delta \varepsilon^{-1}$, а $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда краевая задача (5), (4) имеет соответственно решения

$$u_m^\pm(t, x, \varepsilon) = \exp \left[i \left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \theta + m \right) x \pm 2i \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \alpha^{-1} (\theta + m) \sin \delta + O(\varepsilon^2) \right) t \right],$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

где $\alpha = (1 + 4 \sin^2(\delta/2))^{1/2}$. Отсюда следует, что некоторую совокупность нерегулярных решений краевой задачи (3), (4) естественно искать в виде

$$u = \varepsilon(E_+(t, x, \varepsilon)\xi(\tau, x_+) + \bar{c}c + E_-(t, x, \varepsilon)\eta(\tau, x_-)) + \\ + \varepsilon^2(E_+(t, x, \varepsilon)f_+(\tau, t, x) + \bar{c}c + E_-(t, x, \varepsilon)f_-(\tau, t, x)) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x, \varepsilon) + \dots, \quad (7)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$,

$$x_{\pm} = x \pm \frac{\varepsilon}{2} \left(\cos \frac{\delta}{2} \right) t, \quad E_{\pm}(t, x, \varepsilon) = \exp \left[i(\delta \varepsilon^{-1} + \theta)x \pm 2i \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \alpha^{-1} \theta \sin \delta \right) t \right].$$

Подставим (7) в (3). Соберем коэффициенты при ε^3 . Выбирая специальным образом функции $f_{\pm}(\tau, t, x)$, получаем уравнение относительно u_3 . Из условия его разрешимости в классе периодических по t и x функций приходим к краевой задаче для определения неизвестных амплитуд $\xi(\tau, x_+)$ и $\eta(\tau, x_-)$:

$$2 \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \sin \frac{\delta}{2} \left[-i \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \theta \frac{\partial \xi}{\partial x} - i \theta^2 \xi \right] - a_0 \xi - \xi[|\xi|^2 + 2M(|\eta|^2)], \quad (8)$$

$$2 \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \sin \frac{\delta}{2} \left[i \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \theta \frac{\partial \eta}{\partial x} + i \theta^2 \eta \right] - a_0 \eta - \eta[|\eta|^2 + 2M(|\xi|^2)], \quad (9)$$

$$\xi(\tau, x + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x), \quad \eta(\tau, x + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x). \quad (10)$$

Здесь принято обозначение $M(\varphi(x)) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \varphi(x) dx$.

Таким образом, для произвольного фиксированного значения параметра δ построены краевые задачи (8)–(10), решения которых определяют согласно асимптотической формуле (7) нерегулярные решения исходной краевой задачи (3), (4) с точностью до $o(\varepsilon^3)$.