

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА

М. А. Погребняк

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
Ярославль, Россия*

`pogrebnyakmaksim@mail.ru`

В работе исследуется математическая модель движения транспортного потока, которая описывает движение $N \in \mathbb{N}$ автомобилей и имеет вид системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_n(t) &= R_n \left[a_n \left(\frac{v_{\max} - \dot{x}_{n-1}(t - \tau)}{1 + e^{k_n(x_n(t) - x_{n-1}(t - \tau) + s_n)}} + \dot{x}_{n-1}(t - \tau) - \dot{x}_n(t) \right) \right] + \\ &+ (1 - R_n) \left[q_n \left(\frac{\dot{x}_n(t)[\dot{x}_{n-1}(t - \tau) - \dot{x}_n(t)]}{x_{n-1}(t - \tau) - x_n(t) - l_{n,\varepsilon}} \right) \right], \\ x_n(t) &= \lambda_n, \quad \dot{x}_n(t) = v_n \quad \text{при } t \in [-\tau, 0],\end{aligned}$$

где $\Delta x_n(t, \tau) = x_{n-1}(t - \tau) - x_n(t)$ — расстояние между соседними автомобилями; τ — время реакции водителя; $a_n > 0$ и $q_n > 0$ — коэффициенты, описывающие технические характеристики автомобиля, отвечающие за интенсивность его разгона и торможения соответственно; $v_{\max} > 0$ — максимальная желаемая скорость; $l_{n,\varepsilon} > 0$ — безопасное расстояние вида $l_{n,\varepsilon} = l_n - \varepsilon$, где ε — добавка, служащая для предотвращения торможения автомобиля с неограниченной скоростью при $\Delta x_n(t, \tau)$, достаточно близком к l_n ; $k_n > 0$ и $s_n > 0$ — параметры, описывающие поведения водителя: k_n показывает, насколько плавно водитель преследующего автомобиля подстраивает свою скорость под впереди идущий, а s_n отражает расстояние, начиная с которого влияние впереди идущего автомобиля перестает превалировать; λ_n — начальное положение автомобиля; v_n — начальная скорость автомобиля, а R_n — релейная функция вида

$$R_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta x_n(t, \tau) > \frac{\dot{x}_n^2(t)}{2\mu g} + l_n, \\ 0, & \text{если } \Delta x_n(t, \tau) \leq \frac{\dot{x}_n^2(t)}{2\mu g} + l_n, \end{cases}$$

где μ — коэффициент трения, а g — ускорение свободного падения. Функция R_n описывает переключение “разгон–торможение”.

Для модели был проведен анализ устойчивости равномерного режима движения, при котором все автомобили двигаются с одинаковой скоростью $v_{\max}$ на расстояниях $\Delta c_n = c_n - c_{n-1}$ друг от друга, где c_n — убывающая последовательность. Для любой убывающей последовательности c_n существует решение системы вида

$$x_n(t) = c_n + v_{\max} t.$$

Устойчивость такого решения зависит от знаков выражений

$$d_n = -\tau v_{\max} + c_n - c_{n-1} - l_{n,\varepsilon}.$$

Справедлива следующая

Теорема. Если для всех n выполняется неравенство $d_n > 0$, то равномерный режим устойчив. Если хотя бы при одном каком-то i выполняется неравенство $d_i \leq 0$, то равномерный режим неустойчив.

Из теоремы следует, что если все автомобили потока движутся на довольно большом расстоянии друг от друга, то такой режим движения устойчив. Устойчивость теряется при увеличении скорости $v_{\max}$, времени реакции водителя τ , безопасного расстояния между автомобилями l_n или при сокращении расстояния между двумя соседними автомобилями Δc_n .