Нестабильные K_1-ф-ры и R-эквив-ть

(с Ф. Химем)

<u>Опр</u> X алг. многообр. $/k$, тогда

- $x, y \in X(k)$ непосредств. R-эквив. $\Leftrightarrow$ $\exists\ 0, 1 \in U \subseteq \mathbb{P}^1_k$ и k-морф. $\varphi : U \to X$ т. ч. $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$
- $x, y \in X(k)$ R-эквив. $\Leftrightarrow$ $\exists\ x_1, \dots, x_n \in X(k)$: $x_1 = x$, $x_n = y$, $(x_i; x_{i+1})$ непоср. R-экв. $\forall i$

<u>Обозн</u> $X(k)/R$ = мн-во классов R-эквив.

$X = G$ - алг. гр. $\Rightarrow$ $X(k)/R \cong G(k)/RG(k)$

$$RG(k) = \text{класс } 1$$

<u>Th.</u> (Colliot-Thélène, Sansuc; Kahn-Sujatha, 2014)

char $k = 0$

1) $\forall\, F/k$ расш. полей $\Phi_F : X \to X(F)/R$ — бирац. инв-т гл. пр. многообр. над k

2) Если $\Phi : X \mapsto \Phi(X) \in Sets$ — бирац. инв-т $\Rightarrow$ $\exists$ расш. полей F_i/k т.ч. $\Phi(X) = \varinjlim_i \Phi_{F_i}(X)$

<u>Опр.</u> X/k ретракт-рационально $\Leftrightarrow$ $\exists\, U \subseteq X$ откр. плотное и $V \subseteq \mathbb{A}^n$ откр., k-морф. $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} U$ т. что $\psi \circ \varphi = id_U$

рац. $\Rightarrow$ стаб. рац. $\Rightarrow$ ретракт-рац. $\Rightarrow$ R-трив.

<u>Q</u> X гл. проект $/k$ и $X(F)/R = *$ $\forall\, F/k$ $\Rightarrow$ X ретракт.-рац?

[CT, S, 1977]. $G(R)/_R$ – бирац. инв-т ред. гр. над k (исп. G – унирац.)

NB k – алг. замкн. $\Rightarrow$ $G(\bar{k})/_R = * = \{1\}$

[CT, S; 1987]:

T – алг. тор $/_k \Rightarrow$ T ретракт-рац.

$\Leftrightarrow$ $T(F)/_R = *$ $\forall$ $F/_k$ расш. полей

Опр. G – изотропна $\Leftrightarrow$ G содержит собств. параб. подгр. P

($\Rightarrow$ автом. $\exists$ $P^- \subseteq G$)

Опр. $\forall$ изотр. ред. гр. $G/$ кольцом A и $\forall$

A – алг. R $\quad E_P^G(R) = \langle U_P(R), U_{P^-}(R) \rangle$

$K_1^{G,P}(R) := G(R)/EG_P(R)$ $\quad = EG(R)$

- R – поле, P – строго собств. $\Rightarrow$ $EG_P(R) \trianglelefteq$
- $\mathrm{irk}(G) \geqslant 2$ $\Rightarrow$ $EG_P(R) = EG(R) \trianglelefteq G(R)$

k – поле, G односв. полупростая изотропная

$\Rightarrow$ 1) $\forall$ расш. F/k $\quad G(F)/R = G(F)/EG(F) = K_1^G(F)$

2) G ретракт-рац. $\Leftarrow$ $G(F)/R = *$ $\forall$ F/k

(Gille, 2007)

$G = GL_n \quad EG = E_n \quad K_{1,n}(R) = GL_n(R)/E_n(R)$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$K_1(R) = GL(R)/E(R)$$

Проблема специализации

(A, m) — лок. кольцо, область; $K = \mathrm{Frac}(A)$, $k = A/m$

G — ред. гр. сх. $/A$

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "def"] & G(K) \arrow[r] & G(K)/R \arrow[ddll, leftrightarrow, "?"] \\
G(k) \arrow[d] & G(A)/R \arrow[ur] \arrow[dl] & \\
G(k)/R & &
\end{tikzcd}$$

Опр. $\Sigma \subseteq A[t]$, $\Sigma = \{f \mid f(0), f(1) \in A^\times\}$

X/A — схема, тогда $x, y \in X(A)$

<u>R-эквив.</u> $\Leftrightarrow$ $\exists\, x = x_1, \ldots, x_n = y \in X(A)$: x_i, x_{i+1} непоср. R-экв. в смысле: $\exists\, z(t) \in X(A[t]_\Sigma)$: $z(0) = x$, $z(1) = y$

Th 1

A – равнохар. генз. лок. рег. кольцо, G – ред. гр. $/A$ Тогда

$$G(k)/_R \xleftarrow{\cong} G(A)/_R \xrightarrow{\cong} G(K)/_R$$

NB G – ан. тор $/A$

- A – лок. генз. $\Rightarrow T(A)/_R \cong T(k)/_R$
- A – лок – рег. $\Rightarrow T(A)/_R \cong T(K)/_R$

Th. 2

A – рег. равнохар. лок. кольцо, G/A ред.

1) $irk(G) \geq 1$ или G_k аниз. $\Rightarrow$ $\tau : G(A)/_R \twoheadrightarrow G(K)/_R$

2) $irk(G) \geq 1$ и G односв. полупр. $\Rightarrow$ τ изом.

3) $irk(G) \geq 2$ и G односв. полупр. $\Rightarrow$

$$G(A)/_R \xrightarrow{\cong} K_1^G(A) = G(A)/_{EG(A)}$$

k – поле

$T/_k$ – анизо ред. гр., тор.

$$K_1^T(k) = T(k) \neq T(k)/_R$$

G – пр. ал. гр. $/_k$, анизо

$$K_2^G(k) = G(k) \neq G(k)/_R$$