О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДЛИНЫ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ В ОБОБЩЁННОМ ГРАФЕ БАРАКА – ЭРДЁША

Тесемников Павел Игоревич

✧ *Email: tesemnikov.p@gmail.com; Новосибирский Государственный Университет и Институт Математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия.*

Мы рассматриваем ориентированную версию графа Эрдёша – Реньи – случайный граф $\mathcal{G}_n$ с множеством вершин $\mathcal{V}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ и случайным множеством направленных рёбер $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{V}_n^2$. Будем предполагать, что все рёбра направлены из меньших вершин в бо́льшие и при $i < j$ обозначать через

$$p_{i,j}(n) := \mathbb{P}\left((i, j) \in \mathcal{E}_n\right).$$

Предположим к тому же, что события $\{(i, j) \in \mathcal{E}_n\}$ независимы в совокупности.

В случае, если $p_{i,j}(n)$ не зависит от общего количества вершин n и вершин i и j, граф $\mathcal{G}_n$ называется графом Барака – Эрдёша. Мы изучаем обобщение модели Барака – Эрдёша, предполагая, что $p_{i,j}(n)$ является функцией от i, j и n.

Длиной пути в графе $\mathcal{G}_n$ мы будем называть количество входящих в него рёбер. Обозначим через L_n длину минимального пути между вершинами 0 и n.

Будем предполагать, что

$$p_{i,j}(n) = \frac{f(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})}{n^\gamma},$$

где $f(x, y)$ – функция, интегрируемая по Риману на $[0, 1]^2$, а $\gamma \in (0, 1)$ – положительная постоянная.

Приведём основной результат нашего исследования.

Теорема. *Пусть $\gamma = 1 - 1/k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(L_n = k + 1) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(L_n = k) = \exp\left(-c_k(f)\right),$$

где

$$c_k(f) = \int_{0<u_1<\ldots<u_{k-1}<1} \prod_{j=0}^{k-1} f(u_j, u_{j+1}) du_1 \cdots du_{k-1} \in [0, \infty],$$

$u_0 = 0$ *и* $u_k = 1$.

Доклад основан на совместной работе с Бастиеном Маллейном и подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2022-282.