

## Математика джайнов древней и средневековой Индии

Ш. Г. Дани

Центр передового опыта в области фундаментальных наук UM-DAE,  
Мумбаи 400098

[shrigodani@cbs.ac.in](mailto:shrigodani@cbs.ac.in)

Семинар по истории математики,

Санкт-Петербург

1 сентября 2022 г.

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India  
S.G. Dani  
Introduction  
Early works  
Highlights from the later period

**Introduction**

Jainism was one of the flourishing religions in India in the ancient and medieval times, following its rejuvenation by **Vardhamana Mahavira** (6th c. BCE), alongside the Vedic religion and Buddhism.

Mathematics had an important role in the philosophical pursuits of the Jaina monks. Their involvement stemmed from interest in calculations involving

- Their conception of the terrestrial world, with the earth as a flat disc surrounded alternately by rings of water and land, extending indefinitely.
- Geographical model of the earth, divided by parallel mountain ranges.
- Their model for population of human souls and their individual spiritual developments (in terms of "karma").

### Введение

*В древние и средневековые времена Джайнизм, после его возрождения Вардхаманой Махавирой (VI век до н.э.), был одной из самых процветающих религий в Индии, наряду с ведической религией и буддизмом.*

*Математика играла важную роль в философской занятия джайнских монахов. Их интерес проистекал из их интереса к расчетам, включающим прежде всего*

- Их представление о земном мире с землей в виде плоского диска, окруженного попарно кольцами воды и земли, простирающимися до бесконечности.
  - Географическую модель земли, разделенной параллельными горными хребтами.
  - Их модель популяции человеческих душ и их ...
- \*\*\*

**Early works with mathematical content**

Works with explicit mathematical content, involving numerical calculations, geometry, as also certain other mathematical topics, perhaps go back to about 500 BCE, not long after Mahavira, who himself is believed to have been a mathematician.

- Chandraprajnapati, Suryaprajnapati, Jamabudvipa prajnapati (ca. 500 BCE)
- Sthananga sutra (ca. 300 BCE)
- Bhagavati sutra of Sudharma Svami (ca. 300 BCE)
- Shatkhandagama of Pushpadanta and Bhutabali (between 87 and 156 CE)
- Tatvarthadhigama sutrabhashya of Umasvati (2nd c. CE, or older?)

### Ранние работы с математическим содержанием

**Работы с явным математическим содержанием, включающие числовые расчеты, геометрию, а также некоторые другие математические темы, возможно, восходят к 500 г. до н.э., вскоре после Махавира, который, как полагают, сам был математиком.**

- Чандрапраджнапти, Сурьяпраджнапти, Джамбудвипа праджнапти (ок. 500 г. до н.э.)
- Стананга-сутра (около 300 г. до н.э.)
- Бхагавати-сутра Судхармы Свами (ок. 300 г. до н. э.)
- Шатхандагама из Пушпаданты и Бхутабали (между 87 и 156 гг. н. э.)
- Татвартхадхигама сутрабхашья из Умасвати (II век н.э. или ранее?)

**Revived Jaina tradition**

After a lull in some early centuries of the first millennium, there was renewed interest among Jaina scholars in mathematics, and this time it was guided also by various emerging needs of practical life.

On the one hand, a body of basic mathematics had evolved, in the Aryabhata tradition of mathematical astronomy, and was ripe for diffusion, by scholars with pedagogical interest.

On the other hand there was rise in trade and commerce generating interest in calculations of various kinds.

Many Jaina scholars, who were not involved with astronomy, contributed mathematical works that were instrumental in promotion and applications of mathematics in a wider practical context, from around the 8th century, lasting for about 6 centuries.

### Возрожденная традиция джайнов

**После затишья в течение нескольких первых столетий первого тысячелетия среди джайнских ученых возобновился интерес к**

*математике, и на этот раз он также был обусловлен различными развивающимися потребностями практической жизни.*

*С одной стороны, корпус фундаментальной математики развился в ариабхатанской традиции математической астрономии и сформировался для распространения учеными с педагогической направленностью.*

*С другой стороны, рост торговли и коммерции породил потребность в расчетах различного рода.*

*Начиная примерно с VIII-го века и в течение приблизительно шести веков многие джайнские ученые, не занимавшиеся астрономией, написали математические работы, которые сыграли важную роль в продвижении и применении математики в более широком практическом контексте.*

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India  
S.G. Dani  
Introduction  
Early works  
Highlights from the later period

### Later Jaina exponents

Here are some of the principal figures from the Jaina tradition from 8th to 14th centuries; we shall explore here the developments in terms of their works.

- **Sridhara;** there has been much debate about his period, and whether he was Jaina or a Shaivite; the see-saw has now settled on his being Jaina, and from around 750 CE. Two of his works Patiganita, Trishatika are extant - these seem to be parts of a much larger work which is lost. He has been a much cited author (in later works), and in particular was cited in Bhaskaracharya's influential work(s).
- **Mahavira;** he lived in the later part of the rule of Amoghavarsha Nripatunga (815 – 877 CE), of the Rashtrakuta dynasty (perhaps belonged to his court). He is renowned for the work Ganita Sara Sangraha, which served as a textbook in a wide region of South India for several centuries, as witnessed by extant copies of the work.

### **Более поздние представители джайнизма**

*Вот некоторые из основных фигур джайнской традиции с VIII по XIV века; здесь мы рассмотрим развитие с точки зрения их работ.*

*- Шридхара; было много споров о его периоде и о том, был ли он джайном или шиваитом; мнения сошлись на том, что он Джайна, примерно с 750 г. н.э. Сохранились две его работы «Патиганита», «Тришатика» — вилами, они являются частями гораздо более крупной работы, которая утеряна. Он был часто цитируемым автором (в более поздних работах) и, в частности, цитировался во влиятельных работах Бхаскарачарая.*

*- Махавира; он жил в более поздний период правления Амогхаварши Нрипатунги (815–877 гг. н. э.) из династии Раштракута (возможно, принадлежал к его двору). Он известен работой Ганита Сара Санграха, которая служила учебником в обширном регионе Южной Индии в течение нескольких столетий, о чем свидетельствуют сохранившиеся копии работы.*

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India S.G. Dani Introduction Early works Highlights from the later period	<b>Later Jaina exponents - Contd.</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Virsen</b> (816 CE); known for Dhavala, a commentary, in prakrit, on Shatkhandagama</li> <li>• <b>Nemicandra</b> (981 CE); author of Trilokasara, Gommatasara, and Labdhisara, all in prakrit. A commentary of Trilokasara in Sanskrit, by his pupil Madhavachandra Traividya, was much in circulation.</li> <li>• <b>Thakkura Pheru</b>; held important positions in the treasury, during the period of the successive Sultans Alauddin Khalji (1296–1316 CE), Shihabuddin Umar (1316 CE), Qutubuddin Mubarak Shah (1316–1320 CE) and Ghiyasuddin Tughluq (1320–1325 CE). He is noted for incorporating emerging trends brought in by the Islamic rule in India.</li> </ul> <p>Numerous other Jaina scholars also contributed during the period, especially in pedagogical terms.</p>
---	--

### **Более поздние представители джайнизма - продолжение.**

- **Вирсена (Virsen, Vira Sena, 816 г. н.э.); известен Дхавалой, комментарием к Шатхандагаме, написанным на пракрите**
  - **Немичандра (981 г. н.э.); автор «Трилокасары», «Гомматасары» и «Лабдхисары» — все на пракрите. Написанный его учеником Мадхавачандой Трайвидьей на санскрите «Комментарий к Трилокасаре» был очень популярен.**
  - **Таккура Феру; занимал важные посты в казне в период правления султанов Алауддина Халджи (1296–1316 гг. Н. Э.), Шихабуддина Умара (1316 г. н. Э.), Кутубуддина Мубарака Шаха (1316–1320 гг. Н. Э.) И Гиясуддина Туглука (1320–1325 гг. Н. Э.). Он известен тем, что учитывал новые тенденции, привнесенные в Индию исламским правлением.**
- Многие другие джайнские ученые также внесли свой вклад в этот период, особенно в педагогическом плане.**

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India S.G. Dani Introduction Early works Highlights from the later period	<b>Early Geometry</b> <p>In the ancient world the ratio of the circumference of the circle to its diameter (<math>\pi</math> for us now) was taken to be 3.</p> <p>The Jainas were among the first to depart from the practice. (The Manava sulbasutra, which would be anterior to the Jaina works in question mentions the value <math>3\frac{1}{5}</math> for the ratio, but not found used anywhere, or mentioned in later works.)</p> <p>The Jainas adopted the value <math>\sqrt{10}</math> for the ratio, which is about 3.16, about <math>\frac{2}{3}\%</math> in excess of the true value 3.1415....</p> <p>This value for <math>\pi</math> had great longevity and was in use for almost 2000 years, even after more accurate values, such as 3.1416 in Aryabhata, were known; not only in the Jaina tradition but also in the Hindu tradition, including by Brahmagupta, and later by Arabs and Europeans, during some early period.</p>
---	--

### **Ранняя геометрия**

**В древнем мире отношение длины окружности к ее диаметру (то есть  $\pi$ ) принималось равным 3.**

**Джайны были одними из первых, кто отказался от этой практики.**

(В *Manava sūlbasūtra*, которая должна предшествовать рассматриваемым джайнским трудам, упоминается значение  $3\frac{1}{5}$  для этого отношения, но в более поздних работах оно нигде не используется и не упоминается).

Джайны приняли для отношения значение  $\sqrt{10}$ , что составляет около 3,16, т.е. примерно на  $\frac{2}{3}\%$  превышает истинное значение 3:14159:::

Это значение употреблялось долго и использовалось почти 2000 лет, даже после того, как стали известны более точные значения, такие как 3,1416 в Арьябхатия; не только в джайнской традиции, но и в индуистской, в том числе у Брахмагупты, а затем у арабов и европейцев, в некоторый более ранний период.

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India  
S.G. Dani  
Introduction  
Early works  
Highlights from the later period

**Circumference of the Earth**

Prevalence of the value  $\sqrt{10}$  lies in its convenience, as is seen from the ancient example.

The diameter of the Earth (Jambudvipa, as a flat disc) was supposed to be 100,000 *yojana*. Thus the circumference, according to them, would be  $\sqrt{10} \times 100000$  and this would be computed as the square root of 100,000,000,000 and is described in various early Jaina texts to be

316,227 *yojana*, 3 *gavyuti*, 128 *dhanu*,  $13\frac{1}{2}$  *angula* and a little over.

Here *gavyuti*, *dhanu* and *angula* are smaller units of distance prevailing at the time. One *gavyuti* was equivalent to  $\frac{1}{4}$  *yojana*, a *dhanu* was a 2000th part of a *gavyuti*, and an *angula* was 96th part of a *dhanu*; thus 1 *yojana* = 4 *gavyuti* = 8000 *dhanu* = 768000 *angula*.

The mention of "a little over" is especially notable, as a matter of the attention paid to detail

## Окружность Земли

Преобладание значения  $\sqrt{10}$  заключается в его удобстве, как это видно из древнего примера.

Диаметр Земли (Джамбудвипа, как плоский диск) предполагался равным 100 000 йоджан. Таким образом, длина окружности, по их мнению, будет равна  $\sqrt{10} \times 100 000$ , и она будет вычисляться как квадратный корень из 100 000 000 000, что выражается в различных ранних джайнских текстах как 316227 йоджана, 3 гавьюти, 128 дхану,  $13\frac{1}{2}$  ангугла и немного больше. Здесь гавьюти, дхану и ангугла — меньшие единицы длины, преобладающие в то время. Один гавьюти равнялся  $\frac{1}{4}$  йоджана, дхану равнялась 2000-й части гавьюти, а ангугла равнялась 96-й части дхану; таким образом, 1 йоджана = 4 гавьюти = 8000 дхану = 768000 ангугла. Упоминание «немного больше» особенно примечательно в связи с вниманием к деталям.

\*\*\*

## Методы вычислений

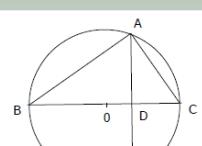
Как показывает вычисление окружности Земли, джайные ученые обладали большими способностями к вычислениям. Тому есть множество примеров, связанных с гораздо большими числами. В полной мере использовалась десятичная система представления чисел вместе с нулем. Их метод вычисления квадратных корней окончательно не известен, но он мог включать в себя метод, известный после Ариабхаты, вместе с формулой приближения типа  $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ . Они также имели дело с перестановками и комбинациями, разбиением чисел, суммированием (конечных) рядов, аналогом логарифмов и т.д.

\* \* \*

Jaina mathematics from ancient and medieval India

S.G. Dani

Introduction  
Early works  
Highlights from the later period



The formula may be deduced easily from consideration of similar triangles, together with the fact that the diameter subtends a right angle and any point on the circle.

It is however more likely the Jainas deduced it using the Pythagoras theorem, which has been known in India from even earlier than Pythagoras, in the Vedic tradition.

## Geometry of the circle

Consider a circle with diameter  $d$ , and a chord, AE in the figure. Let  $c$  be the length of AE and  $h$  that of DC, the corresponding "arrow". The formula

$$c = \sqrt{4h(d - h)}$$

occurs quite frequently in early Jaina works.

## **Геометрия круга**

## Хорда и дуга

Рассмотрим окружность диаметром  $d$  и хорду окружности. Пусть  $c$  — длина хорды, а  $h$  — соответствующей «стрелки». **Формула**

$$c = \sqrt{4h(d - h)}$$

довольно часто встречается в ранних джайнских произведениях. Формула может быть легко выведена из рассмотрения подобных треугольников с учетом того факта, что для любой точки окружности угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

Однако более вероятно, что джайны вывели ее, используя теорему Пифагора, которая в ведической традиции была известна в Индии раньше, чем Пифагору.

\*\*\*

**Chord and the arc**

Formulae for  $h$  and  $d$  are also derived from the above relation, thus determining from any one of them in terms of the other two.

More intriguingly, they had a formula for the arc  $a$  corresponding to the chord as

$$a = \sqrt{6h^2 + c^2}.$$

The formula is clearly an ad hoc and approximate one, and is inspired by the Pythagoras theorem.

Heron of Alexandria (2nd c) also had formulae for the arc as  $\sqrt{4h^2 + c^2 + \frac{1}{4}h}$  and (a more refined)  $\sqrt{4h^2 + c^2(1 + \frac{h}{c})} - h$ . The following table shows that on the whole the Jaina formula fares better in comparison with Heron's formulae.

### Хорда и дуга

Формулы для  $h$  и  $d$ , которые можно вывести из (1), также приведены в работах в том смысле, что любая из этих величин может быть выведена через две другие.

Еще более интересно то, что у них была формула для дуги  $a$ , соответствующей хорде как  $a = \sqrt{6h^2 + c^2}$ .

Формула явно приспособлена для этого случая, носит приближенный характер, и вдохновлена теоремой Пифагора.

Герон Александрийский (II век) также имел формулы для дуги, такие, как  $\sqrt{4h^2 + c^2} + \frac{1}{4}h$  и (более изысканная)

$\sqrt{4h^2 + c^2} \left(1 + \frac{h}{c}\right) - h$ . Следующая таблица показывает, что в целом джайнская формула дает лучшее приближение, чем формула Герона.

\*\*\*

Comparison with Heron's formula					
	Angle	arclength true value	Jaina value	Heron's 1st value	Heron's 2nd value
	15°	0.5236	0.5243 (+0.0007)	0.5306 (+0.0070)	0.5224 (-0.0012)
	30°	1.0472	1.0525 (+0.0053)	1.0688 (+0.0216)	1.0400 (-0.0072)
	45°	1.5708	1.5858 (+0.0150)	1.6049 (+0.0341)	1.5549 (-0.0159)
	60°	2.0944	2.1213 (+0.0269)	2.1250 (+0.0306)	2.0774 (-0.0170)
	75°	2.6180	2.6511 (+0.0331)	2.6203 (+0.0023)	2.6281 (+0.0101)
	90°	3.1416	3.1623	3.0784	3.2426

## Сравнение с формулой Герона

Угол	Длина дуги, истинное значение	Значение Джайна	Герон, первое значение	Герон, второе значение

\*\*\*

Permutations and combinations					
Jaina mathematics from ancient and medieval India	S.G. Dani	Introduction	Early works	Highlights from the later period	References are found in ancient Jaina works to number of permutations and combinations in various contexts.
					A general formula for the number of ways of choosing certain number of specimen from a given collection was described by Sridhara (ca. 750), in a sutra, which corresponds to the usual formula $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .
					The Bhagavatisutra discusses the number of ways $s$ souls can enter $h$ hells/heavens (the occupancy problem) for values of $s$ and $h$ upto 12. It may be noted that this number corresponds to $C_s^{s+h-1}$ . While there are no general formula found in the ancient works, it is seen in the calculations described by the commentator Abhayadeva (10/11 c.) that the inductive rule $C_{m+1}^{n+m} = C_m^{n+m-1} \times \frac{n+m}{m+1}$ was recognized.

\*\*\*

## Перестановки и комбинации

В древних произведениях джайнов в различных контекстах можно найти ссылки на число перестановок и комбинаций. Общая формула для количества способов выбора определенного количества предметов из данного набора была описана в сутре Шридхарой (ок. 750 г.), что соответствует обычной формуле  $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

В «Бхагаватисутре» обсуждается количество способов, которыми  $s$  душ могут попасть в  $h$  адов/небес (проблема занятости) при значениях  $s$  и  $h$  не превосходящих 12. Заметим, что это число соответствует  $C_s^{s+h-1}$ .

Хотя в древних работах нет общей формулы, видно, что в расчетах, описанных комментатором **Абхаядевой** (X-XI в.), было признано правило индукции

$$C_{m+1}^{n+m} = C_m^{n+m-1} \times \frac{n+m}{m+1}$$

\*\*\*

**Series summation**

Summation of various (finite) series, and related problems, have been a favourite topic in ancient and medieval Indian mathematics, going back at least to Aryabhata, and the medieval Jainas are no exception.

Sridhara and Mahavira especially are seen to relish the topic, and in particular created complicated variations of the arithmetic progressions to sum up, such as  $\sum_1^m T_n$  where  $T_n$  itself is given in terms of partial sums of an arithmetical series, as  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , where for each  $k$ ,  $a_k = b + kc$ , with given  $b$  and  $c$ .

Generalizing Aryabhata's consideration of the series  $\sum_1^m n^2$  and  $\sum_1^m n^3$ , Sridhara and Mahavira also discuss sums of the form  $\sum_1^m a_n^2$  and  $\sum_1^m a_n^3$ , for any arithmetic progression  $a_n = b + nd$ , for some  $b$  and  $d$ .

## Суммирование ряда

Суммирование различных (конечных) рядов и связанные с ними задачи были излюбленной темой древней и средневековой индийской математики, восходящей, по крайней мере, к Ариабхате, и средневековые джайны не являются исключением.

Видно, что Шридхара и Махавира особенно наслаждались этой темой и, в частности, суммировали арифметические прогрессии сложных разновидностей, такие, как  $\sum_1^m T_n$ , где  $T_n$ , в свою очередь, представлено как частичные суммы арифметического ряда вида  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , где для каждого  $k$ ,  $a_k = b + kc$  при заданных  $b$  и  $c$ .

Обобщая рассуждения Арьябхаты о рядах  $\sum_1^m n^2$  и  $\sum_1^m n^3$  Шридхара и Махавира также обсуждают суммы вида  $\sum_1^m a_n^2$  и  $\sum_1^m a_n^3$  для любой арифметической прогрессии  $a_n = b + nd$  при некоторых  $b$  и  $d$ .

\*\*\*

### Sridhara's volume formula

The main task before the exponents in the later phase was exposition of mathematical knowledge that had accumulated over the period. In course of it, apart from pedagogical skills they contributed also new knowledge, of varying degrees of depth. We focus here only some certain select items.

In the Indian context credit for giving the first correct formula for the volume of a sphere is given to Bhaskaracharya (12th c.); Aryabhata has a formula for it but it is incorrect.

It turns out however that the formula described by Sridhara in this respect is correct, in spirit. He gives the volume of a sphere of diameter  $d$  to be  $\frac{1}{2}d^3(1 + \frac{1}{18})$ . By correct in spirit I mean that the factor  $1 + \frac{1}{18}$  corresponds in a natural way in their context to  $\frac{1}{3}\pi$ , so the formula rightly corresponds to the correct formula  $\frac{1}{6}\pi d^3$  for the volume.

We note that  $\frac{1}{3}\pi \approx \frac{1}{3}\sqrt{10} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{(1 + \frac{1}{9})} \approx 1 + \frac{1}{18}$ .

### Формула объема Шридхары

Главной задачей, стоявшей перед представителями следующего этапа, было изложение накопленных ими за этот период математических знаний. При этом, помимо педагогического мастерства, они привносили и новые знания разной степени глубины. Мы сосредоточимся здесь только на некоторых определенных элементах.

В индийском контексте заслуга создания первой правильной формулы объема шара принадлежит Бхаскарачарье (XII век); в астрономическом трактате Ариабхаты есть формула для этого, но она неверна. Однако оказывается, что формула, описанная в этом отношении Шридхарой, верна по духу. Он полагает объем шара диаметром  $d$  равным  $\frac{1}{2}d^3(1 + \frac{1}{18})$ . Под верным по духу я имею в виду, что множитель  $1 + \frac{1}{18}$  естественным образом соответствует в их контексте  $\frac{1}{3}\pi$ , поэтому формула верно соответствует истинной формуле объема  $\frac{1}{6}\pi d^3$ .

Заметим, что  $\frac{1}{3}\pi \approx \frac{1}{3}\sqrt{10} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{(1 + \frac{1}{9})} \approx 1 + \frac{1}{18}$ .

\*\*\*

### Virasena's formula for a conical frustum

In his *Dhavala Tika* the volume Virasena gives a formula for the volume of a conical frustum with diameters  $a$  and  $b$  at the base and top respectively, and height  $h$  as

$$\frac{\pi h}{4} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Unlike in much of the extant ancient and medieval mathematical literature in India, we find here a description of the method of determining the volume.

Moreover, the method involves summation of an infinite series and the idea of infinitesimals, akin to calculus. The ideas are reminiscent of computations going back to Archimedes and Liu Hui, but the details are arguably new, and seem to be a notable first in the mathematics in India. In particular the work may have influenced Bhaskaracarya.

### Формула Вирсены для усеченного конуса

В своей книге «Дхавала Тика» Вирасена дает формулу для объема усеченного конуса с диаметрами  $a$  и  $b$  при основании и вершине соответственно, и высотой  $h$ :

$$\frac{\pi h}{4} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

В отличие от большей части сохранившейся древней и средневековой математической литературы Индии, здесь мы находим описание метода определения объема. Более того, метод включает в себя суммирование бесконечного ряда и идею бесконечно малых величин, сродни исчислению. Идеи напоминают расчеты, восходящие к Архимеду и Лю Хуэю, но детали, возможно, новые и кажутся пионерскими в математике Индии. В частности, эта работа могла повлиять на Бхаскарачарью.

\*\*\*

**“Logarithms”**

The Jaina scholars also toyed with an idea like the logarithms. While it is perhaps rooted in quite old times in some way, a discussion on it in some detail is found in Virsena's Dhavala commentary. It was also elaborated on by Nemichandra.

The idea occurs in the form of what is called “ardhachheda”, essentially counting how many times the number can be divided by 2 (sometimes base 3 was also considered).

The usual laws of indices (corresponding to  $(\log mn = \log m + \log n$  etc.) are stated in Dhavala.

Unfortunately they did not find a proper way to determine the ardha-chheda for numbers which are not powers of 2, leading to a peculiar choice of taking ardha-chheda of  $1+x$  to be  $x$  for “small”  $x$ ; thus the ardha-chheda of  $\frac{256}{13}$ , which is  $2^4 \times \frac{16}{13}$  is given as  $4\frac{3}{13}$ .

### «Логарифмы»

Ученые-джайнисты также играли с такой идеей, как логарифмы. Хотя вопрос, возможно, каким-то образом уходит корнями в довольно старые времена, его обсуждение в некоторых деталях можно найти в комментарии Вирсены к Дхавале. Он также был разработан Немичандой.

Идея возникает в форме того, что называется «ардхачхеда», по сути, это подсчет, сколько раз число может быть разделено на 2 (иногда также учитывалось основание 3).

Обычные законы показателей (соответствующие  $\log(mn) = \log m + \log n$ ) изложены в Дхавале.

К сожалению, они не нашли надлежащего способа определения ардхаххеды для чисел, которые не являются степенями двойки, что привело к своеобразному выбору принятия ардхаххеды

1 + x к x для «малого» x; таким образом, ardhachheda  $\frac{256}{13}$ , то есть  $2^4 \times \frac{16}{13}$  выражается как  $4\frac{3}{13}$ .

\*\*\*

### Mahavira's formulas for "ellipse" etc.

Mahavira is known for his discussing areas and volumes of various non-standard figures, such as a conchiform, tortoise back, curved shape of a ring, etc.:

He also gives formulae for what he refers to as "ayatavritta". "ayata" refers to rectangle and "vritta" to circle, so the figure under consideration is a rectangular, or oblong, "circle". In the literature the term is generally translated as "ellipse"; this however may not be justified; there is no description of how the figure was constructed, or any characteristic that would identify it with ellipses as in the Greek tradition.

Invoking two parameters "ayama" and "vyasa", for the longer and shorter dimensions, say  $a$  and  $b$  respectively, the circumference of the figure is given to be  $2a + b$  in approximate measure, and to be  $\sqrt{4a^2 + 6b^2}$  in fine measure.

## Формулы Махавиры для «эллипса» и т. д.

Махавира известен своими обсуждениями площадей и объемов различных нестандартных фигур, таких как раковина, спина черепахи, изогнутая форма кольца и т. д.

Он также дает формулы для того, что он называет «аятавритта». «Аята» относится к прямоугольнику, а «вритта» — к кругу, поэтому рассматриваемая фигура представляет собой прямоугольный или продолговатый «круг». В литературе этот термин обычно переводится как «эллипс»; это, однако, не может быть оправдано; нет описания того, как была построена фигура, или какой-либо характеристики, которая отождествляла бы ее с эллипсами, как в греческой традиции.

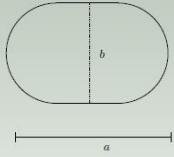
Используя два параметра «аяма» и «вьяса» для более длинного и более короткого измерений: допустим,  $a$  и  $b$  соответственно, длина контура фигуры приблизительно равна  $2a + b$  и более точно равна  $\sqrt{4a^2 + 6b^2}$ .

\*\*\*

Jaina  
mathematics  
from ancient  
and medieval  
India

S.G. Dani

Introduction  
Early works  
Highlights  
from the later  
period



ayatavritta

**"ellipse" continued**

The two formulae are seen to correspond to viewing "ayatavritta" (approximately) as the shapes here; the bottom figure is a join of two bow-arrow figures (with chord  $a$  and arrow  $b/2$ ), for which the early Jaina formula yields  $\sqrt{a^2 + \frac{3}{2}b^2}$  for each of the arcs.

Formulas are also given for the area, involving multiplying the circumference by half of what is referred to as "vishkambha"; the term is subject to interpretations, and we will not go into it.

## «Эллипс», продолжение

Эти две формулы приблизительно соответствуют «аятавритте» для представленных здесь форм; нижний рисунок представляет собой

соединение двух фигур лука и стрелы (с хордой  $a$  и стрелой  $\frac{b}{2}$ ), для которых ранняя джайнская формула дает  $\sqrt{a^2 + \frac{3}{2}b^2}$  для каждой из дуг.

Также есть формулы для площади, включающие умножение длины окружности на половину того, что называется «вишкамбхой»; термин требует толкования, и мы не будем вдаваться в подробности.

\*\*\*

mathematics  
from ancient  
and medieval  
India  
S.G. Dani  
  
Introduction  
Early works  
  
Highlights  
from the later  
period

#### Pheru and Magic squares

Pheru's work Ganita Sara Kaumudi, apart from giving an exposition of various mathematics topics of broad interest, provides improved formulae in various respects. One distinguishing feature is his treatment of Magic squares.

Though magic squares have been known in India for a long time, had religious significance and were used to convey good wishes, Pheru was the first one to give a systematic treatment construction of magic squares.

Pheru classifies magic squares into three groups according to the size of the square; those of odd order, of order divisible by 4 and of even order not divisible by 4. He gives general constructions for the first two groups. As to the last, only a magic square of order 6 is described (presumably he had difficulty for larger values).

Pheru also discusses ways of transforming a magic square into another.

...  
...  
...

### Феру и магические квадраты

Работа Феру Ганита Сара Каумуди, помимо изложения различных тем математики, представляющих широкий интерес, содержит в различных отношениях улучшенные формулы. Отличительной чертой является его трактовка магических квадратов.

Хотя магические квадраты были известны в Индии уже давно, имели религиозное значение и использовались для передачи добрых пожеланий, Феру был первым, кто дал систематическую трактовку построения магических квадратов.

Феру классифицирует магические квадраты на три группы в зависимости от размера квадрата: нечетного порядка; порядка, кратного 4; и четного порядка, не кратного 4. Он дает общие построения для первых двух групп. Что касается последнего, то описан только магический квадрат 6-го порядка (предположительно у него были трудности с большими значениями). Феру также обсуждает способы преобразования одного магического квадрата в другой.

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India  
S.G. Dani

Introduction  
Early works  
Highlights from the later period

**A  $9 \times 9$  magic square of Pheru**

I convey my best wishes to you all by presenting this  $9 \times 9$  magic square of Pheru!!

37	48	59	70	81	2	13	24	35
36	38	49	60	71	73	3	14	25
26	28	39	50	61	72	74	4	15
16	27	29	40	51	62	64	75	5
6	17	19	30	41	52	63	65	76
77	7	18	20	31	42	53	55	66
67	78	8	10	21	32	43	54	56
57	68	79	9	11	22	33	44	46
47	58	69	80	1	12	23	34	45

The numbers in each row, each column and along the two diagonals add to 369.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

## Магический квадрат Феру $9 \times 9$

Я передаю свои наилучшие пожелания всем Вам, представляя этот

**$9 \times 9$  магический квадрат Феру!!**

Числа в каждой строке, каждом столбце и вдоль обеих диагоналей в сумме дают 369.

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India  
S.G. Dani

Introduction  
Early works  
Highlights from the later period

\* Thank you \*

for your attention.

*Namaskar*

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Благодарю Вас за внимание!

