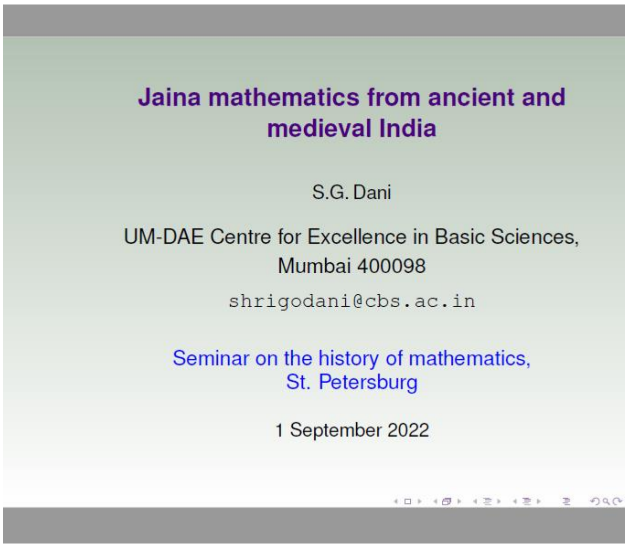


Математика джайнов древней и средневековой Индии

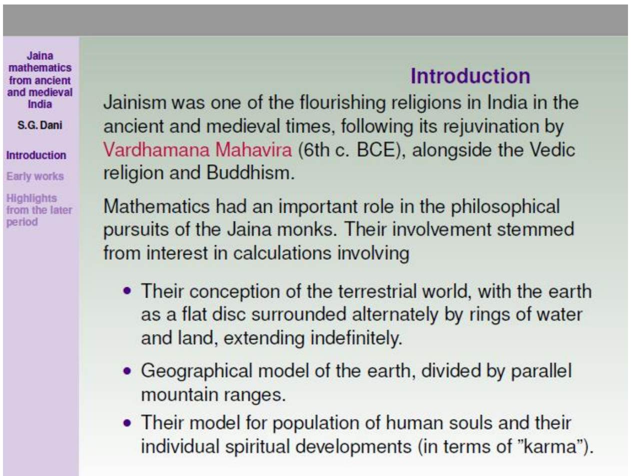
Ш. Г. Дани

Центр передового опыта в области фундаментальных наук UM-DAE,
Мумбаи **400098**
shrigodani@cbs.ac.in

Семинар по истории математики,
Санкт-Петербург

1 сентября 2022 г.

***



Введение

В древние и средневековые времена Джайнизм, после его возрождения Вардхаманой Махавирой (VI век до н.э.), был одной из самых процветающих религий в Индии, наряду с ведической религией и буддизмом.

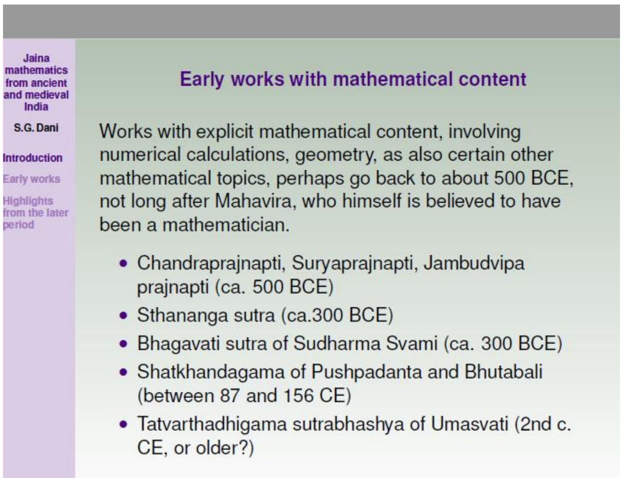
Математика играла важную роль в философской занятия джайнских монахов. Их интерес проистекал из их интереса к расчетам, включающим прежде всего

- Их представление о земном мире с землей в виде плоского диска, окруженного попеременно кольцами воды и земли, простирающимися до бесконечности.

- Географическую модель земли, разделенной параллельными горными хребтами.

- Их модель популяции человеческих душ и их ...

***

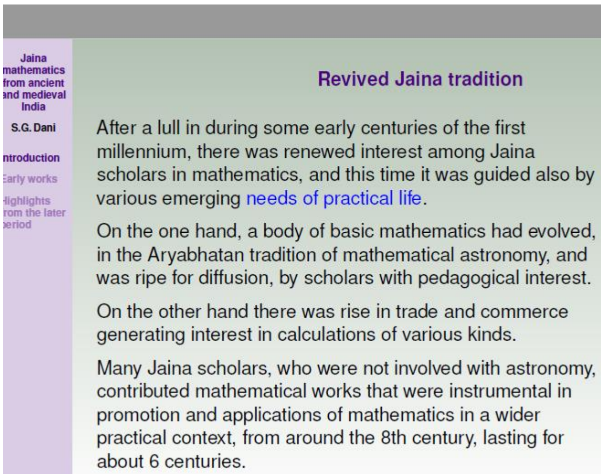


Ранние работы с математическим содержанием

Работы с явным математическим содержанием, включающие числовые расчеты, геометрию, а также некоторые другие математические темы, возможно, восходят к 500 г. до н.э., вскоре после Махавиры, который, как полагают, сам был математиком.

- ***Чандрапраджнапти, Сурьяпраджнапти, Джамбудвипа праджнапти (ок. 500 г. до н.э.)***
- ***Стхананга-сутра (около 300 г. до н.э.)***
- ***Бхагавати-сутра Судхармы Свами (ок. 300 г. до н. э.)***
- ***Шатхандагама из Пушпаданты и Бхутабали (между 87 и 156 гг. н. э.)***
- ***Татвартхадхигама сутрабхашья из Умасвати (II век н.э. или ранее?)***

***



Возрожденная традиция джайнов

После затишья в течение нескольких первых столетий первого тысячелетия среди джайнских ученых возобновился интерес к

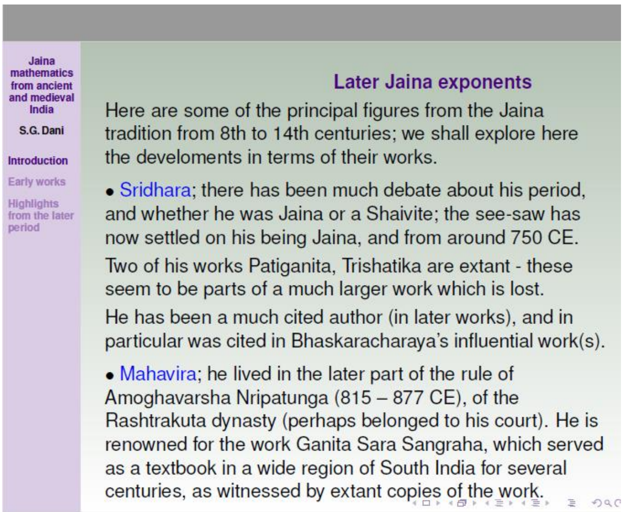
математике, и на этот раз он также был обусловлен различными развивающимися потребностями практической жизни.

С одной стороны, корпус фундаментальной математики развился в ариабхатанской традиции математической астрономии и сформировался для распространения учеными с педагогической направленностью.

С другой стороны, рост торговли и коммерции породил потребность в расчетах различного рода.

Начиная примерно с VIII-го века и в течение приблизительно шести веков многие джайнские ученые, не занимавшиеся астрономией, написали математические работы, которые сыграли важную роль в продвижении и применении математики в более широком практическом контексте.

*****



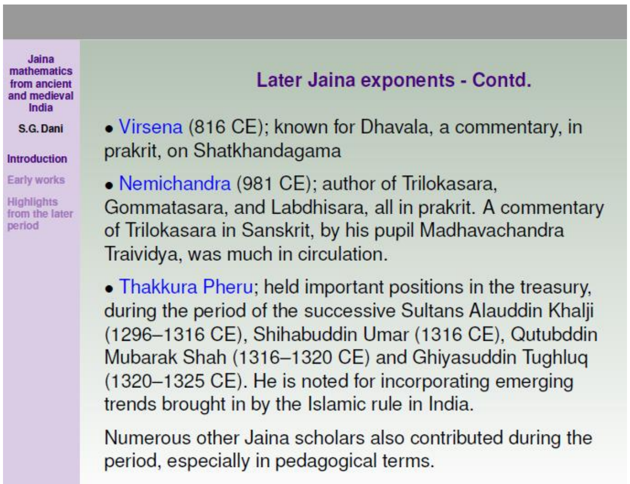
Более поздние представители джайнизма

Вот некоторые из основных фигур джайнской традиции с VIII по XIV века; здесь мы рассмотрим развитие с точки зрения их работ.

- Шридхара; было много споров о его периоде и о том, был ли он джайном или шиваитом; мнения сошлись на том, что он Джайна, примерно с 750 г. н.э. Сохранились две его работы «Патиганита», «Тришатика» — вилимо, они являются частями гораздо более крупной работы, которая утеряна. Он был часто цитируемым автором (в более поздних работах) и, в частности, цитировался во влиятельных работах Бхаскарачарая.

- Махавира; он жил в более поздний период правления Амогхаварши Нрипатунги (815–877 гг. н. э.) из династии Раштракута (возможно, принадлежал к его двору). Он известен работой Ганита Сара Санграха, которая служила учебником в обширном регионе Южной Индии в течение нескольких столетий, о чем свидетельствуют сохранившиеся копии работы.

*****

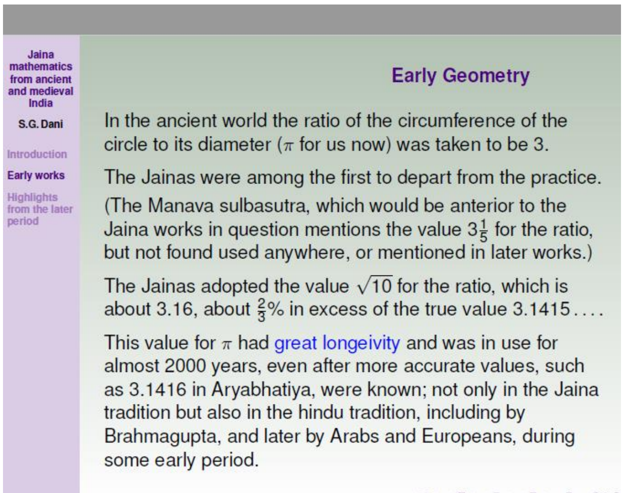


Более поздние представители джайнизма - продолжение.

- ***Вирсена (Virsena, Vira Sena, 816 г. н.э.); известен Дхавалой, комментарием к Шатхандагаме, написанным на пракрите***
- ***Немичандра (981 г. н.э.); автор «Трилокасары», «Гомматасары» и «Лабдхиссры» — все на пракрите. Написанный его учеником Мадхавачандрой Трайвидьей на санскрите «Комментарий к Трилокасаре» был очень популярен.***
- ***Таккура Феру; занимал важные посты в казне в период правления султанов Алауддина Халджи (1296–1316 гг. Н. Э.), Шихабуддина Умара (1316 г. н. Э.), Кутубддина Мубарака Шаха (1316–1320 гг. Н. Э.) И Гиясуддина Туглука (1320–1325 гг. Н. Э.). Он известен тем, что учитывал новые тенденции, привнесенные в Индию исламским правлением.***

Многие другие джайнские ученые также внесли свой вклад в этот период, особенно в педагогическом плане.

***



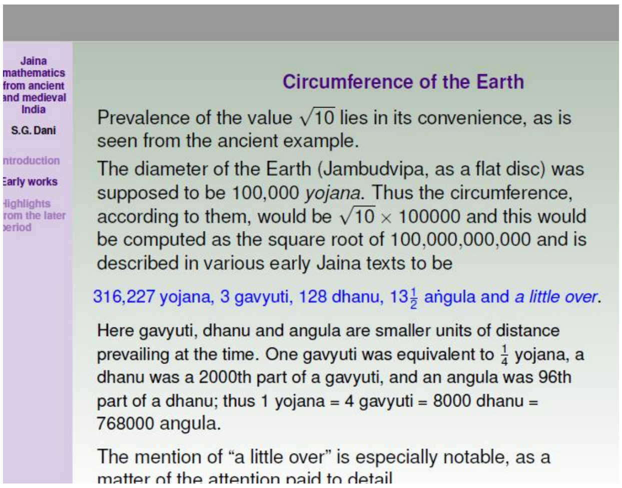
Ранняя геометрия

В древнем мире отношение длины окружности к ее диаметру (то есть π) принималось равным 3.

Джайны были одними из первых, кто отказался от этой практики.

(В *Manava sulbasutra*, которая должна предшествовать рассматриваемым джайнским трудам, упоминается значение $3\frac{1}{5}$ для этого отношения, но в более поздних работах оно нигде не используется и не упоминается). Джайны приняли для отношения значение $\sqrt{10}$, что составляет около 3,16, т.е. примерно на $\frac{2}{3}$% превышает истинное значение 3:14159:::.
Это значение употреблялось долго и использовалось почти 2000 лет, даже после того, как стали известны более точные значения, такие как 3,1416 в Арьябхатия; не только в джайнской традиции, но и в индуистской, в том числе у Брахмагупты, а затем у арабов и европейцев, в некоторый более ранний период.

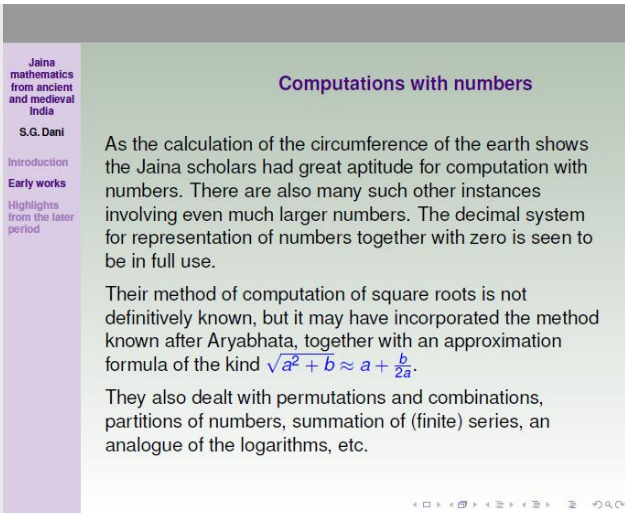
***



Окружность Земли

Преобладание значения $\sqrt{10}$ заключается в его удобстве, как это видно из древнего примера.
Диаметр Земли (Джамбудвипа, как плоский диск) предполагался равным 100 000 йоджан. Таким образом, длина окружности, по их мнению, будет равна $\sqrt{10} \times 100\,000$, и она будет вычисляться как квадратный корень из 100 000 000 000, что выражается в различных ранних джайнских текстах как 316227 йоджана, 3 гавьюти, 128 дхану, $13\frac{1}{2}$ангула и *немного* больше. Здесь гавьюти, дхану и ангула — меньшие единицы длины, преобладающие в то время. Один гавьюти равнялся $\frac{1}{4}$ йоджана, дхану равнялась 2000-й части гавьюти, а ангула равнялась 96-й части дхану; таким образом, 1 йоджана = 4 гавьюти = 8000 дхану = 768000 ангула. Упоминание «*немного* больше» особенно примечательно в связи с вниманием к деталям.

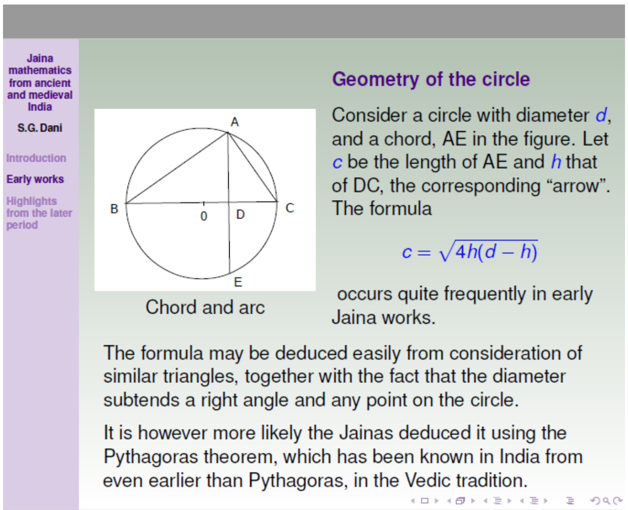
***



Методы вычислений

Как показывает вычисление окружности Земли, джайнские ученые обладали большими способностями к вычислениям. Тому есть множество примеров, связанных с гораздо большими числами. В полной мере использовалась десятичная система представления чисел вместе с нулем. Их метод вычисления квадратных корней окончательно не известен, но он мог включать в себя метод, известный после Ариабхаты, вместе с формулой приближения типа $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}$. Они также имели дело с перестановками и комбинациями, разбиением чисел, суммированием (конечных) рядов, аналогом логарифмов и т.д.

***



Геометрия круга

Хорда и дуга

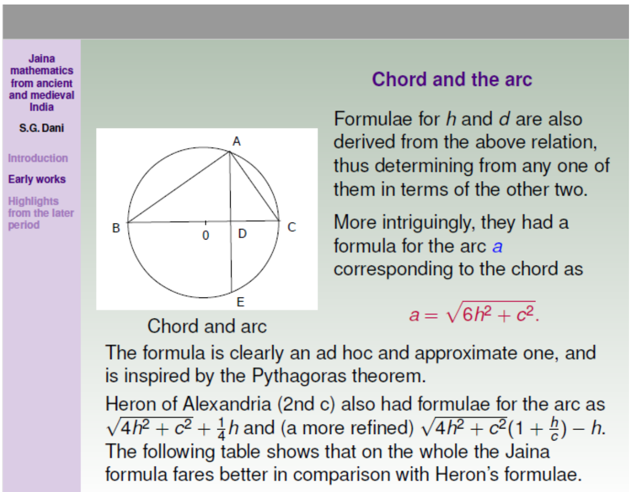
Рассмотрим окружность диаметром *d и* хорду окружности. Пусть *c* — длина хорды, а *h* — соответствующей «стрелки».
Формула

$$c = \sqrt{4h(d-h)}$$

довольно часто встречается в ранних джайнских произведениях. Формула может быть легко выведена из рассмотрения подобных треугольников с учетом того факта, что для любой точки окружности угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

Однако более вероятно, что джайны вывели ее, используя теорему Пифагора, которая в ведической традиции была известна в Индии раньше, чем Пифагору.

***



Хорда и дуга

Формулы для h и d, которые можно вывести из (1), также приведены в работах в том смысле, что любая из этих величин может быть выведена через две другие.

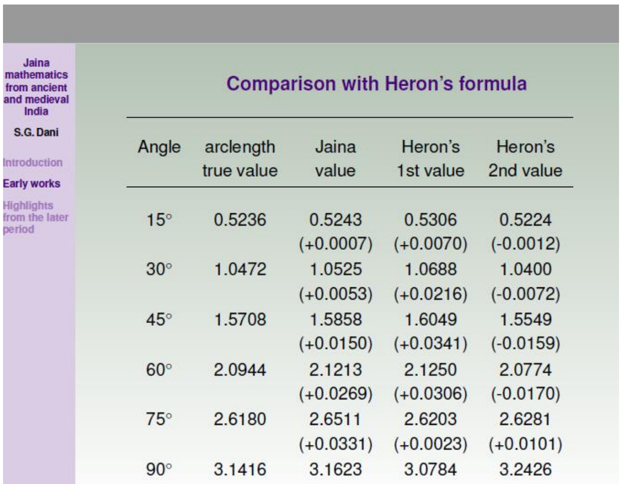
Еще более интригующе то, что у них была формула для дуги a, соответствующей хорде как $a = \sqrt{6h^2 + c^2}$.

Формула явно приспособлена для этого случая, носит приближенный характер, и вдохновлена теоремой Пифагора.

Герон Александрийский (II век) также имел формулы для дуги, такие, как $\sqrt{4h^2 + c^2} + \frac{1}{4}h$ и (более изысканная)

$\sqrt{4h^2 + c^2}\left(1 + \frac{h}{c}\right) - h$. Следующая таблица показывает, что в целом джайнская формула дает лучшее приближение, чем формула Герона.

***



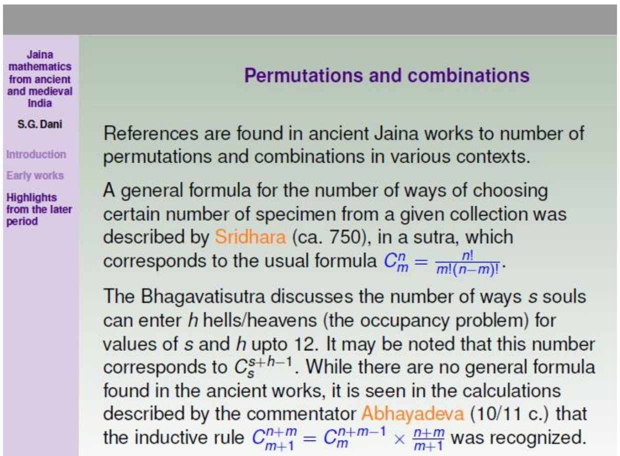
Comparison with Heron's formula

Angle	arclength true value	Jaina value	Heron's 1st value	Heron's 2nd value
15°	0.5236	0.5243 (+0.0007)	0.5306 (+0.0070)	0.5224 (-0.0012)
30°	1.0472	1.0525 (+0.0053)	1.0688 (+0.0216)	1.0400 (-0.0072)
45°	1.5708	1.5858 (+0.0150)	1.6049 (+0.0341)	1.5549 (-0.0159)
60°	2.0944	2.1213 (+0.0269)	2.1250 (+0.0306)	2.0774 (-0.0170)
75°	2.6180	2.6511 (+0.0331)	2.6203 (+0.0023)	2.6281 (+0.0101)
90°	3.1416	3.1623	3.0784	3.2426

Сравнение с формулой Герона

Угол	*Длина дуги, истинное значение*	*Значение Джайна*	*Герон, первое значение*	*Герон, второе значение*

***



Permutations and combinations

References are found in ancient Jaina works to number of permutations and combinations in various contexts.

A general formula for the number of ways of choosing certain number of specimen from a given collection was described by Sridhara (ca. 750), in a sutra, which corresponds to the usual formula $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

The Bhagavatisutra discusses the number of ways s souls can enter h hells/heavens (the occupancy problem) for values of s and h upto 12. It may be noted that this number corresponds to C_s^{s+h-1}. While there are no general formula found in the ancient works, it is seen in the calculations described by the commentator Abhayadeva (10/11 c.) that the inductive rule $C_{m+1}^{n+m} = C_m^{n+m-1} \times \frac{n+m}{m+1}$ was recognized.

***

Перестановки и комбинации

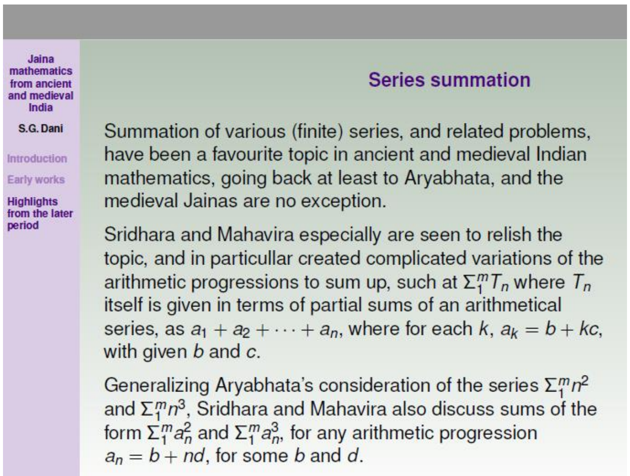
В древних произведениях джайнов в различных контекстах можно найти ссылки на число перестановок и комбинаций. Общая формула для количества способов выбора определенного количества предметов из данного набора была описана в сутре **Шридхарой** (ок. 750 г.), что соответствует обычной формуле $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

В «Бхагаватисутре» обсуждается количество способов, которыми s душ могут попасть в h адов/небес (проблема занятости) при значениях s и h не превосходящих 12. Заметим, что это число соответствует C_s^{s+h-1}.

Хотя в древних работах нет общей формулы, видно, что в расчетах, описанных комментатором **Абхаядевой** (X-XI в.), было признано правило индукции

$$C_{m+1}^{n+m} = C_m^{n+m-1} \times \frac{n+m}{m+1}$$

***



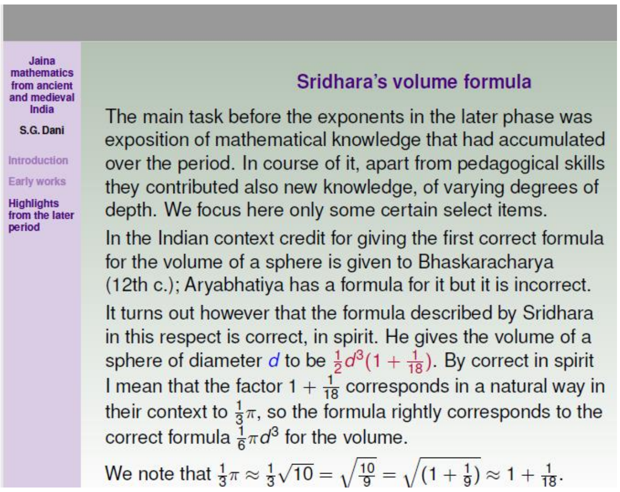
Суммирование ряда

Суммирование различных (конечных) рядов и связанные с ними задачи были излюбленной темой древней и средневековой индийской математики, восходящей, по крайней мере, к Ариабхате, и средневековые джайны не являются исключением.

Видно, что Шридхара и Махавира особенно наслаждались этой темой и, в частности, суммировали арифметические прогрессии сложных разновидностей, такие, как $\sum_1^m T_n$, где T_n , в свою очередь, представлено как частичные суммы арифметического ряда вида $a_1 + a_2 + \cdots . + a_n$, где для каждого k, $a_k = b + kc$ при заданных b и c.

Обобщая рассуждения Арьябхаты о рядах $\sum_1^m n^2$ и $\sum_1^m n^3$ Шридхара и Махавира также обсуждают суммы вида $\sum_1^m a_n^2$ и $\sum_1^m a_n^3$ для любой арифметической прогрессии $a_n = b + nd$ при некоторых b и d.

***



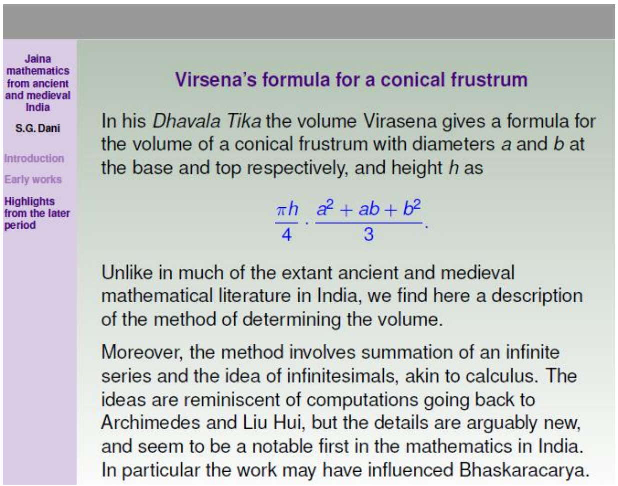
Формула объема Шридхары

Главной задачей, стоявшей перед представителями следующего этапа, было изложение накопленных ими за этот период математических знаний. При этом, помимо педагогического мастерства, они привносили и новые знания разной степени глубины. Мы сосредоточимся здесь только на некоторых определенных элементах.

В индийском контексте заслуга создания первой правильной формулы объема шара принадлежит Бхаскарачарье (XII век); в астрономическом трактате Ариабхатья есть формула для этого, но она неверна. Однако оказывается, что формула, описанная в этом отношении Шридхарой, верна по духу. Он полагает объем шара диаметром *d* равным $\frac{1}{2}d^3\left(1+\frac{1}{18}\right)$. Под верным по духу я имею в виду, что множитель $1+\frac{1}{18}$ естественным образом соответствует в их контексте $\frac{1}{3}\pi$, поэтому формула верно соответствует истинной формуле объема $\frac{1}{6}\pi d^3$.

Заметим, что $\frac{1}{3}\pi \approx \frac{1}{3}\sqrt{10}=\sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{(1+\frac{1}{9})} \approx 1+\frac{1}{18}$.

***



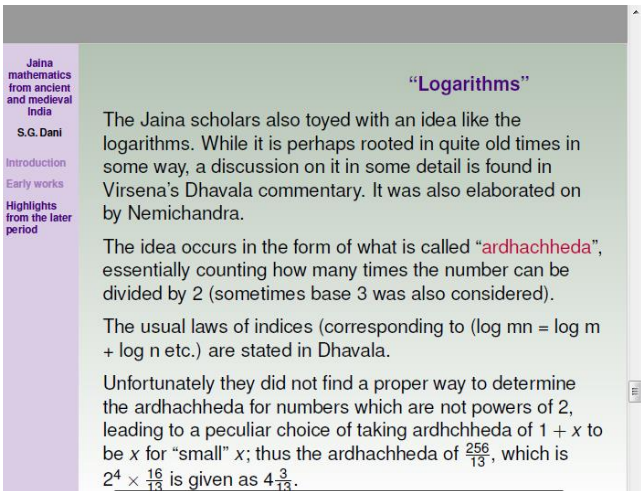
Формула Вирсены для усеченного конуса

В своей книге «Дхавала Тика» Вирасена дает формулу для объема усеченного конуса с диаметрами *a* и *b* при
основании и вершине соответственно, и высотой *h*:

$\frac{\pi h}{4} \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3}$.

В отличие от большей части сохранившейся древней и средневековой математической литературы Индии, здесь мы находим описание метода определения объема.
Более того, метод включает в себя суммирование бесконечного ряда и идею бесконечно малых величин, сродни исчислению. Идеи напоминают расчеты, восходящие к Архимеду и Лю Хуэю, но детали, возможно, новые и кажутся пионерскими в математике Индии. В частности, эта работа могла повлиять на Бхаскарачарью.

***



«Логарифмы»

Ученые-джайнисты также играли с такой идеей, как логарифмы. Хотя вопрос, возможно, каким-то образом уходит корнями в довольно старые времена, его обсуждение в некоторых деталях можно найти в комментарии Вирсены к Дхавале. Он также был разработан Немичандрой.

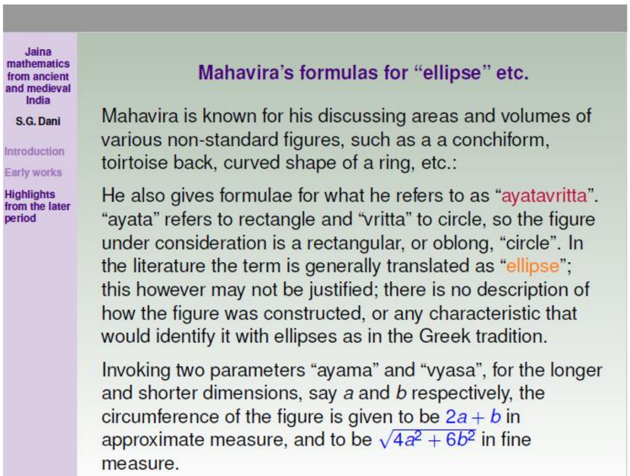
Идея возникает в форме того, что называется «ардхачхеда», по сути, это подсчет, сколько раз число может быть разделено на 2 (иногда также учитывалось основание 3).

Обычные законы показателей (соответствующие $log(mn) = logm + logn$) изложены в Дхавале.

К сожалению, они не нашли надлежащего способа определения ардхахxеды для чисел, которые не являются степенями двойки, что привело к своеобразному выбору принятия ардхахxеды

$1 + x$ к x для «малого» x; таким образом, ardhachheda $\frac{256}{13}$, то есть $2^4 \times \frac{16}{13}$ выражается как $4\frac{3}{13}$.

***



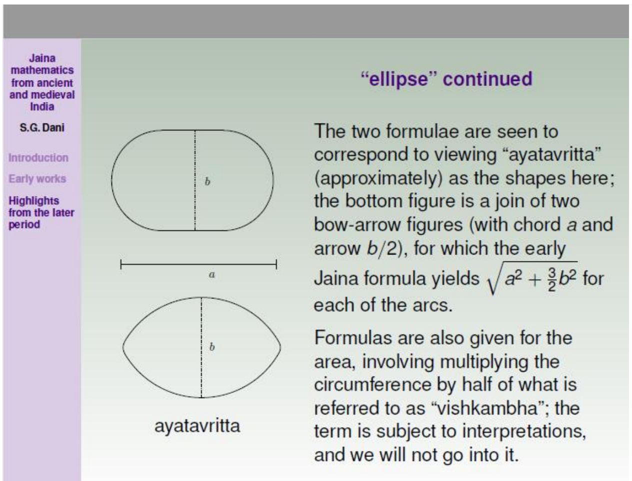
Формулы Махавиры для «эллипса» и т. д.

Махавира известен своими обсуждениями площадей и объемов различных нестандартных фигур, таких как раковина, спина черепахи, изогнутая форма кольца и т. д.

Он также дает формулы для того, что он называет «аятавритта». «Аята» относится к прямоугольнику, а «вритта» — к кругу, поэтому рассматриваемая фигура представляет собой прямоугольный или продолговатый «круг». В литературе этот термин обычно переводится как «эллипс»; это, однако, не может быть оправдано; нет описания того, как была построена фигура, или какой-либо характеристики, которая отождествляла бы ее с эллипсами, как в греческой традиции.

Используя два параметра «аяма» и «вьяса» для более длинного и более короткого измерений: допустим, *a* и *b* соответственно, длина контура фигуры приблизительно равна 2*a* + *b* и более точно равна $\sqrt{4a^2 + 6b^2}$.

***



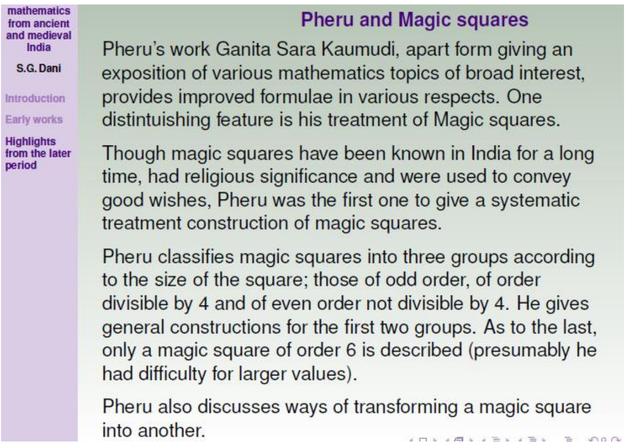
«Эллипс», продолжение

Эти две формулы приблизительно соответствуют «аятавритте» для представленных здесь форм; нижний рисунок представляет собой

соединение двух фигур лука и стрелы (с хордой a и стрелой $\frac{b}{2}$), для которых ранняя джайнская формула дает $\sqrt{a^2 + \frac{3}{2} b^2}$ для каждой из дуг.

Также есть формулы для площади, включающие умножение длины окружности на половину того, что называется «вишкамбхой»; термин требует толкования, и мы не будем вдаваться в подробности.

***



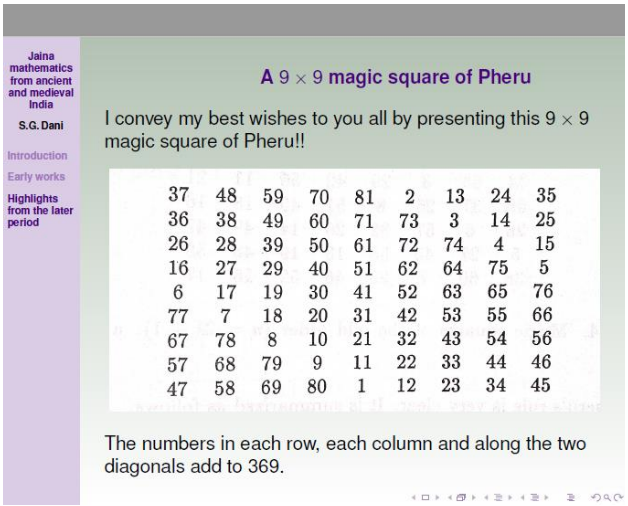
Феру и магические квадраты

Работа Феру Ганита Сара Каумуди, помимо изложения различных тем математики, представляющих широкий интерес, содержит в различных отношениях улучшенные формулы. Отличительной чертой является его трактовка магических квадратов.

Хотя магические квадраты были известны в Индии уже давно, имели религиозное значение и использовались для передачи добрых пожеланий, Феру был первым, кто дал систематическую трактовку построения магических квадратов.

Феру классифицирует магические квадраты на три группы в зависимости от размера квадрата: нечетного порядка; порядка, кратного 4; и четного порядка, не кратного 4. Он дает общие построения для первых двух групп. Что касается последнего, то описан только магический квадрат 6-го порядка (предположительно у него были трудности с большими значениями). Феру также обсуждает способы преобразования одного магического квадрата в другой.

***



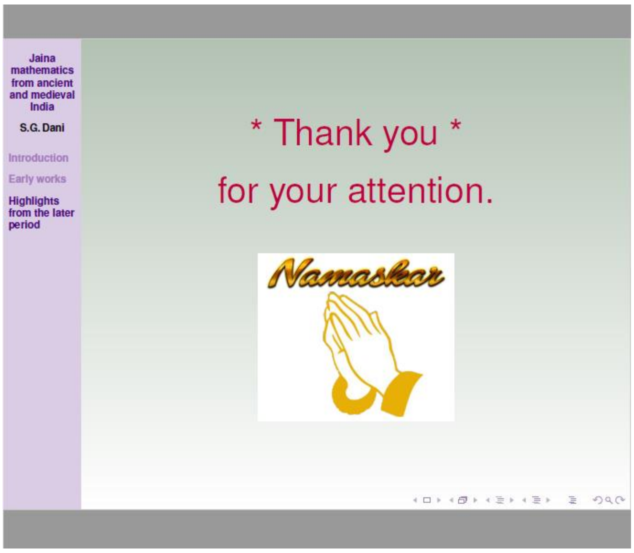
37	48	59	70	81	2	13	24	35
36	38	49	60	71	73	3	14	25
26	28	39	50	61	72	74	4	15
16	27	29	40	51	62	64	75	5
6	17	19	30	41	52	63	65	76
77	7	18	20	31	42	53	55	66
67	78	8	10	21	32	43	54	56
57	68	79	9	11	22	33	44	46
47	58	69	80	1	12	23	34	45

Магический квадрат Феру 9×9

Я передаю свои наилучшие пожелания всем Вам, представляя этот 9×9 магический квадрат Феру!!

Числа в каждой строке, каждом столбце и вдоль обеих диагоналей в сумме дают 369.

***



Благодарю Вас за внимание!