

## Математика джайнов древней и средневековой Индии

Ш. Г. Дани

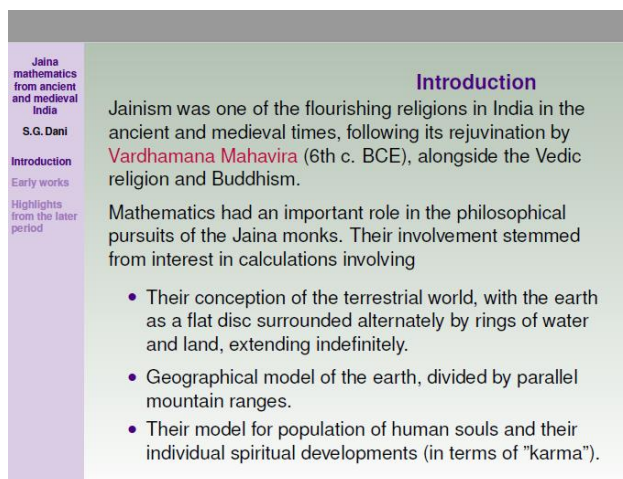
Центр передового опыта в области фундаментальных наук UM-DAE,  
Мумбаи 400098

[shrigodani@cbs.ac.in](mailto:shrigodani@cbs.ac.in)

Семинар по истории математики,  
Санкт-Петербург

1 сентября 2022 г.

\*\*\*



### Введение

*В древние и средневековые времена Джайнизм, после его возрождения Вардхаманой Махавирой (VI век до н.э.), был одной из самых процветающих религий в Индии, наряду с ведической религией и буддизмом.*

*Математика играла важную роль в философской занятии джайнских монахов. Их интерес проистекал из их интереса к расчетам, включающим прежде всего*

- Их представление о земном мире с землей в виде плоского диска, окруженного попеременно кольцами воды и земли, простирающимися до бесконечности.

- Географическую модель земли, разделенной параллельными горными хребтами.

- Их модель популяции человеческих душ и их ...

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India	Early works with mathematical content
S.G. Dani	Works with explicit mathematical content, involving numerical calculations, geometry, as also certain other mathematical topics, perhaps go back to about 500 BCE, not long after Mahavira, who himself is believed to have been a mathematician.
Introduction	
Early works	
Highlights from the later period	

### Ранние работы с математическим содержанием

Работы с явным математическим содержанием, включающие числовые расчеты, геометрию, а также некоторые другие математические темы, возможно, восходят к 500 г. до н.э., вскоре после Махавиры, который, как полагают, сам был математиком.

- Чандрапраджнапти, Сурьяпраджнапти, Джамбудви́па праджнапти (ок. 500 г. до н.э.)
- Сthanанга-сутра (около 300 г. до н.э.)
- Бхагавати-сутра Судхармы Свами (ок. 300 г. до н. э.)
- Шатхандагама из Пушпаданты и Бхутабали (между 87 и 156 гг. н. э.)
- Татвартхадхигама сутрабхашья из Умасвати (II век н.э. или ранее?)

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India	Revived Jaina tradition
S.G. Dani	After a lull in during some early centuries of the first millennium, there was renewed interest among Jaina scholars in mathematics, and this time it was guided also by various emerging <a href="#">needs of practical life</a> .
Introduction	
Early works	
Highlights from the later period	

### Возрожденная традиция джайнов

После затишья в течение нескольких первых столетий первого тысячелетия среди джайнских ученых возобновился интерес к

*математике, и на этот раз он также был обусловлен различными развивающимися потребностями практической жизни.*

*С одной стороны, корпус фундаментальной математики развился в ариабхатанской традиции математической астрономии и сформировался для распространения учеными с педагогической направленностью.*

*С другой стороны, рост торговли и коммерции породил потребность в расчетах различного рода.*

*Начиная примерно с VIII-го века и в течение приблизительно шести веков многие джайнские ученые, не занимавшиеся астрономией, написали математические работы, которые сыграли важную роль в продвижении и применении математики в более широком практическом контексте.*

\*\*\*

<p>Jaina mathematics from ancient and medieval India</p> <p>S.G. Dani</p> <p>Introduction</p> <p>Early works</p> <p>Highlights from the later period</p>	<h3>Later Jaina exponents</h3> <p>Here are some of the principal figures from the Jaina tradition from 8th to 14th centuries; we shall explore here the developments in terms of their works.</p> <ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Sridhara</b>; there has been much debate about his period, and whether he was Jaina or a Shaivite; the see-saw has now settled on his being Jaina, and from around 750 CE. Two of his works Patiganita, Trishatika are extant - these seem to be parts of a much larger work which is lost. He has been a much cited author (in later works), and in particular was cited in Bhaskaracharya's influential work(s).</li><li>• <b>Mahavira</b>; he lived in the later part of the rule of Amoghavarsha Nripatunga (815 – 877 CE), of the Rashtrakuta dynasty (perhaps belonged to his court). He is renowned for the work Ganita Sara Sangraha, which served as a textbook in a wide region of South India for several centuries, as witnessed by extant copies of the work.</li></ul>
--	---

### **Более поздние представители джайнизма**

*Вот некоторые из основных фигур джайнской традиции с VIII по XIV века; здесь мы рассмотрим развитие с точки зрения их работ.*

*- **Шридхара**; было много споров о его периоде и о том, был ли он джайном или шиваитом; мнения сошлись на том, что он Джайна, примерно с 750 г. н.э. Сохранились две его работы «Патиганита», «Тришатика» — вилито, они являются частями гораздо более крупной работы, которая утеряна. Он был часто цитируемым автором (в более поздних работах) и, в частности, цитировался во влиятельных работах Бхаскарачарая.*

*- **Махавира**; он жил в более поздний период правления Амогхаварши Нрипатунги (815–877 гг. н. э.) из династии Раштракута (возможно, принадлежал к его двору). Он известен работой Ганита Сара Санграха, которая служила учебником в обширном регионе Южной Индии в течение нескольких столетий, о чем свидетельствуют сохранившиеся копии работы.*

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India	<b>Later Jaina exponents - Contd.</b>
S.G.Dani	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Virsenā</b> (816 CE); known for Dhavala, a commentary, in prakrit, on Shatkhandagama</li> </ul>
Introduction	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Nemichandra</b> (981 CE); author of Trilokasara, Gommatasara, and Labdhisara, all in prakrit. A commentary of Trilokasara in Sanskrit, by his pupil Madhavachandra Traividya, was much in circulation.</li> </ul>
Early works	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Thakkura Pheru</b>; held important positions in the treasury, during the period of the successive Sultans Alauddin Khalji (1296–1316 CE), Shihabuddin Umar (1316 CE), Qutubddin Mubarak Shah (1316–1320 CE) and Ghiyasuddin Tughluq (1320–1325 CE). He is noted for incorporating emerging trends brought in by the Islamic rule in India.</li> </ul>
Highlights from the later period	<p>Numerous other Jaina scholars also contributed during the period, especially in pedagogical terms.</p>

### **Более поздние представители джайнизма - продолжение.**

- **Вирсена (Virsenā, Vira Sena, 816 г. н.э.);** известен Дхавалой, комментарием к Шатхандагаме, написанным на пракрите
- **Немичандра (981 г. н.э.);** автор «Трилокасары», «Гомматасары» и «Лабдхиссары» — все на пракрите. Написанный его учеником Мадхавачандрой Траивидьей на санскрите «Комментарий к Трилокасаре» был очень популярен.
- **Таккура Феру;** занимал важные посты в казне в период правления султанов Алауддина Халджи (1296–1316 гг. Н. Э.), Шихабуддина Умара (1316 г. н. Э.), Кутубуддина Мубарака Шаха (1316–1320 гг. Н. Э.) И Гиясуддина Туглука (1320–1325 гг. Н. Э.). Он известен тем, что учитывал новые тенденции, привнесенные в Индию исламским правлением.

Многие другие джайнские ученые также внесли свой вклад в этот период, особенно в педагогическом плане.

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India	<b>Early Geometry</b>
S.G.Dani	<p>In the ancient world the ratio of the circumference of the circle to its diameter (<math>\pi</math> for us now) was taken to be 3.</p>
Introduction	<p>The Jainas were among the first to depart from the practice. (The Manava sulbasutra, which would be anterior to the Jaina works in question mentions the value <math>3\frac{1}{5}</math> for the ratio, but not found used anywhere, or mentioned in later works.)</p>
Early works	<p>The Jainas adopted the value <math>\sqrt{10}</math> for the ratio, which is about 3.16, about <math>\frac{2}{3}\%</math> in excess of the true value 3.1415....</p>
Highlights from the later period	<p>This value for <math>\pi</math> had <b>great longevity</b> and was in use for almost 2000 years, even after more accurate values, such as 3.1416 in Aryabhatiya, were known; not only in the Jaina tradition but also in the hindu tradition, including by Brahmagupta, and later by Arabs and Europeans, during some early period.</p>

### **Ранняя геометрия**

В древнем мире отношение длины окружности к ее диаметру (то есть  $\pi$ ) принималось равным 3.

Джайны были одними из первых, кто отказался от этой практики.



(В *Manava sulbasutra*, которая должна предшествовать рассматриваемым джайнским трудам, упоминается значение  $3\frac{1}{5}$  для этого отношения, но в более поздних работах оно нигде не используется и не упоминается). Джайны приняли для отношения значение  $\sqrt{10}$ , что составляет около 3,16, т.е. примерно на  $\frac{2}{3}\%$  превышает истинное значение 3:14159:...

Это значение употреблялось долго и использовалось почти 2000 лет, даже после того, как стали известны более точные значения, такие как 3,1416 в Арьяхатия; не только в джайнской традиции, но и в индуистской, в том числе у Брахмагупты, а затем у арабов и европейцев, в некоторый более ранний период.

\*\*\*

Circumference of the Earth	
Jaina mathematics from ancient and medieval India S.G. Dani Introduction Early works Highlights from the later period	Prevalence of the value $\sqrt{10}$ lies in its convenience, as is seen from the ancient example.
	The diameter of the Earth (Jambudvīpa, as a flat disc) was supposed to be 100,000 <i>yojana</i> . Thus the circumference, according to them, would be $\sqrt{10} \times 100000$ and this would be computed as the square root of 100,000,000,000 and is described in various early Jaina texts to be
	316,227 <i>yojana</i> , 3 <i>gavyuti</i> , 128 <i>dhanu</i> , $13\frac{1}{2}$ <i>añgula</i> and a little over.
	Here <i>gavyuti</i> , <i>dhanu</i> and <i>angula</i> are smaller units of distance prevailing at the time. One <i>gavyuti</i> was equivalent to $\frac{1}{4}$ <i>yojana</i> , a <i>dhanu</i> was a 2000th part of a <i>gavyuti</i> , and an <i>angula</i> was 96th part of a <i>dhanu</i> ; thus 1 <i>yojana</i> = 4 <i>gavyuti</i> = 8000 <i>dhanu</i> = 768000 <i>angula</i> .
	The mention of “a little over” is especially notable, as a matter of the attention paid to detail

### Окружность Земли

Преобладание значения  $\sqrt{10}$  заключается в его удобстве, как это видно из древнего примера.

Диаметр Земли (Джамбудвипа, как плоский диск) предполагался равным 100 000 йоджан. Таким образом, длина окружности, по их мнению, будет равна  $\sqrt{10} \times 100\,000$ , и она будет вычисляться как квадратный корень из 100 000 000 000, что выражается в различных ранних джайнских текстах как 316227 йоджана, 3 гавьюти, 128 дхану,  $13\frac{1}{2}$ -ангула и *немного больше*. Здесь гавьюти, дхану и ангула — меньшие единицы длины, преобладающие в то время. Один гавьюти равнялся  $\frac{1}{4}$  йоджана, дхану равнялась 2000-й части гавьюти, а ангула равнялась 96-й части дхану; таким образом, 1 йоджана = 4 гавьюти = 8000 дхану = 768000 ангула. Упоминание «немного больше» особенно примечательно в связи с вниманием к деталям.

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India

S.G. Dani

Introduction

Early works

Highlights from the later period

### Computations with numbers

As the calculation of the circumference of the earth shows the Jaina scholars had great aptitude for computation with numbers. There are also many such other instances involving even much larger numbers. The decimal system for representation of numbers together with zero is seen to be in full use.

Their method of computation of square roots is not definitively known, but it may have incorporated the method known after Aryabhata, together with an approximation formula of the kind  $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ .

They also dealt with permutations and combinations, partitions of numbers, summation of (finite) series, an analogue of the logarithms, etc.

## Методы вычислений

Как показывает вычисление окружности Земли, джайнские ученые обладали большими способностями к вычислениям. Тому есть множество примеров, связанных с гораздо большими числами. В полной мере использовалась десятичная система представления чисел вместе с нулем. Их метод вычисления квадратных корней окончательно не известен, но он мог включать в себя метод, известный после Ариабхаты, вместе с формулой приближения типа  $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$ . Они также имели дело с перестановками и комбинациями, разбиением чисел, суммированием (конечных) рядов, аналогом логарифмов и т.д.

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India

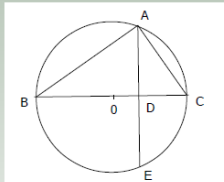
S.G. Dani

Introduction

Early works

Highlights from the later period

### Geometry of the circle



Consider a circle with diameter  $d$ , and a chord, AE in the figure. Let  $c$  be the length of AE and  $h$  that of DC, the corresponding "arrow". The formula

$$c = \sqrt{4h(d - h)}$$

occurs quite frequently in early Jaina works.

Chord and arc

The formula may be deduced easily from consideration of similar triangles, together with the fact that the diameter subtends a right angle and any point on the circle.

It is however more likely the Jainas deduced it using the Pythagoras theorem, which has been known in India from even earlier than Pythagoras, in the Vedic tradition.

## Геометрия круга

### Хорда и дуга

Рассмотрим окружность диаметром  $d$  и хорду окружности. Пусть  $c$  — длина хорды, а  $h$  — соответствующей «стрелки».

### Формула

$$c = \sqrt{4h(d - h)}$$

довольно часто встречается в ранних джайнских произведениях. Формула может быть легко выведена из рассмотрения подобных треугольников с учетом того факта, что для любой точки окружности угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

Однако более вероятно, что джайны вывели ее, используя теорему Пифагора, которая в ведической традиции была известна в Индии раньше, чем Пифагору.

\*\*\*

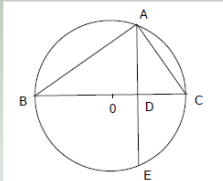
Jaina mathematics from ancient and medieval India  
S.G. Dani

Introduction

Early works

Highlights from the later period

### Chord and the arc



Formulae for  $h$  and  $d$  are also derived from the above relation, thus determining from any one of them in terms of the other two.

More intriguingly, they had a formula for the arc  $a$  corresponding to the chord as

$$a = \sqrt{6h^2 + c^2}.$$

Chord and arc

The formula is clearly an ad hoc and approximate one, and is inspired by the Pythagoras theorem.

Heron of Alexandria (2nd c) also had formulae for the arc as  $\sqrt{4h^2 + c^2} + \frac{1}{4}h$  and (a more refined)  $\sqrt{4h^2 + c^2}(1 + \frac{h}{c}) - h$ . The following table shows that on the whole the Jaina formula fares better in comparison with Heron's formulae.

## Хорда и дуга

Формулы для  $h$  и  $d$ , которые можно вывести из (1), также приведены в работах в том смысле, что любая из этих величин может быть выведена через две другие.

Еще более интригующе то, что у них была формула для дуги  $a$ , соответствующей хорде как  $a = \sqrt{6h^2 + c^2}$ .

Формула явно приспособлена для этого случая, носит приближенный характер, и вдохновлена теоремой Пифагора.

Герон Александрийский (II век) также имел формулы для дуги, такие, как  $\sqrt{4h^2 + c^2} + \frac{1}{4}h$  и (более изысканная)

$\sqrt{4h^2 + c^2} \left(1 + \frac{h}{c}\right) - h$ . Следующая таблица показывает, что в целом джайнская формула дает лучшее приближение, чем формула Герона.

\*\*\*

<div>Jaina mathematics from ancient and medieval India</div> <div>S.G. Dani</div> <div>Introduction</div> <div>Early works</div> <div>Highlights from the later period</div>	Comparison with Heron's formula				
	Angle	arclength true value	Jaina value	Heron's 1st value	Heron's 2nd value
	15°	0.5236	0.5243 (+0.0007)	0.5306 (+0.0070)	0.5224 (-0.0012)
	30°	1.0472	1.0525 (+0.0053)	1.0688 (+0.0216)	1.0400 (-0.0072)
	45°	1.5708	1.5858 (+0.0150)	1.6049 (+0.0341)	1.5549 (-0.0159)
	60°	2.0944	2.1213 (+0.0269)	2.1250 (+0.0306)	2.0774 (-0.0170)
	75°	2.6180	2.6511 (+0.0331)	2.6203 (+0.0023)	2.6281 (+0.0101)
	90°	3.1416	3.1623	3.0784	3.2426

Сравнение с формулой Герона

Угол	Длина дуги, истинное значение	Значение Джайна	Герон, первое значение	Герон, второе значение
------	-------------------------------	-----------------	------------------------	------------------------

\*\*\*

<div>Jaina mathematics from ancient and medieval India</div> <div>S.G. Dani</div> <div>Introduction</div> <div>Early works</div> <div>Highlights from the later period</div>	Permutations and combinations	
	References are found in ancient Jaina works to number of permutations and combinations in various contexts.	
	A general formula for the number of ways of choosing certain number of specimen from a given collection was described by Sridhara (ca. 750), in a sutra, which corresponds to the usual formula $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .	
	The Bhagavatisutra discusses the number of ways $s$ souls can enter $h$ hells/heavens (the occupancy problem) for values of $s$ and $h$ upto 12. It may be noted that this number corresponds to $C_s^{s+h-1}$ . While there are no general formula found in the ancient works, it is seen in the calculations described by the commentator Abhayadeva (10/11 c.) that the inductive rule $C_{m+1}^{n+m} = C_m^{n+m-1} \times \frac{n+m}{m+1}$ was recognized.	

\*\*\*

Перестановки и комбинации

В древних произведениях джайнов в различных контекстах можно найти ссылки на число перестановок и комбинаций. Общая формула для количества способов выбора определенного количества предметов из данного набора была описана в сутре

Шридхарой (ок. 750 г.), что соответствует обычной формуле  $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .



В «Бхагаватисутре» обсуждается количество способов, которыми  $s$  душ могут попасть в  $h$  адов/небес (проблема занятости) при значениях  $s$  и  $h$  не превосходящих 12. Заметим, что это число соответствует  $C_s^{s+h-1}$ .

Хотя в древних работах нет общей формулы, видно, что в расчетах, описанных комментатором **Абхаядевой** (X-XI в.), было признано правило индукции

$$C_{m+1}^{n+m} = C_m^{n+m-1} \times \frac{n+m}{m+1}$$

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India	
S.G.Dani	<b>Series summation</b>
Introduction	Summation of various (finite) series, and related problems, have been a favourite topic in ancient and medieval Indian mathematics, going back at least to Aryabhata, and the medieval Jainas are no exception.
Early works	Sridhara and Mahavira especially are seen to relish the topic, and in particular created complicated variations of the arithmetic progressions to sum up, such as $\sum_1^m T_n$ where $T_n$ itself is given in terms of partial sums of an arithmetical series, as $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , where for each $k$ , $a_k = b + kc$ , with given $b$ and $c$ .
Highlights from the later period	Generalizing Aryabhata's consideration of the series $\sum_1^m n^2$ and $\sum_1^m n^3$ , Sridhara and Mahavira also discuss sums of the form $\sum_1^m a_n^2$ and $\sum_1^m a_n^3$ for any arithmetic progression $a_n = b + nd$ , for some $b$ and $d$ .

### Суммирование ряда

Суммирование различных (конечных) рядов и связанные с ними задачи были излюбленной темой древней и средневековой индийской математики, восходящей, по крайней мере, к Ариабхате, и средневековые джайны не являются исключением.

Видно, что Шридхара и Махавира особенно наслаждались этой темой и, в частности, суммировали арифметические прогрессии сложных разновидностей, такие, как  $\sum_1^m T_n$ , где  $T_n$ , в свою очередь, представлено как частичные суммы арифметического ряда вида  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , где для каждого  $k$ ,  $a_k = b + kc$  при заданных  $b$  и  $c$ .

Обобщая рассуждения Арьябхаты о рядах  $\sum_1^m n^2$  и  $\sum_1^m n^3$  Шридхара и Махавира также обсуждают суммы вида  $\sum_1^m a_n^2$  и  $\sum_1^m a_n^3$  для любой арифметической прогрессии  $a_n = b + nd$  при некоторых  $b$  и  $d$ .

\*\*\*

<p>Jaina mathematics from ancient and medieval India</p> <p>S.G. Dani</p> <p>Introduction</p> <p>Early works</p> <p>Highlights from the later period</p>	<h3 style="text-align: center;">Sridhara's volume formula</h3> <p>The main task before the exponents in the later phase was exposition of mathematical knowledge that had accumulated over the period. In course of it, apart from pedagogical skills they contributed also new knowledge, of varying degrees of depth. We focus here only some certain select items.</p> <p>In the Indian context credit for giving the first correct formula for the volume of a sphere is given to Bhaskaracharya (12th c.); Aryabhatiya has a formula for it but it is incorrect. It turns out however that the formula described by Sridhara in this respect is correct, in spirit. He gives the volume of a sphere of diameter <math>d</math> to be <math>\frac{1}{2}d^3(1 + \frac{1}{18})</math>. By correct in spirit I mean that the factor <math>1 + \frac{1}{18}</math> corresponds in a natural way in their context to <math>\frac{1}{3}\pi</math>, so the formula rightly corresponds to the correct formula <math>\frac{1}{6}\pi d^3</math> for the volume.</p> <p>We note that <math>\frac{1}{3}\pi \approx \frac{1}{3}\sqrt{10} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{(1 + \frac{1}{9})} \approx 1 + \frac{1}{18}</math>.</p>
--	--

## Формула объема Шридхары

Главной задачей, стоявшей перед представителями следующего этапа, было изложение накопленных ими за этот период математических знаний. При этом, помимо педагогического мастерства, они приносили и новые знания разной степени глубины. Мы сосредоточимся здесь только на некоторых определенных элементах.

В индийском контексте заслуга создания первой правильной формулы объема шара принадлежит Бхаскарачарье (XII век); в астрономическом трактате Ариабхатты есть формула для этого, но она неверна. Однако оказывается, что формула, описанная в этом отношении Шридхарой, верна по духу. Он полагает объем шара диаметром  $d$  равным  $\frac{1}{2}d^3(1 + \frac{1}{18})$ . Под верным по духу я имею в виду, что множитель  $1 + \frac{1}{18}$  естественным образом соответствует в их контексте  $\frac{1}{3}\pi$ , поэтому формула верно соответствует истинной формуле объема  $\frac{1}{6}\pi d^3$ .

Заметим, что  $\frac{1}{3}\pi \approx \frac{1}{3}\sqrt{10} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{(1 + \frac{1}{9})} \approx 1 + \frac{1}{18}$ .

\*\*\*

<p>Jaina mathematics from ancient and medieval India</p> <p>S.G. Dani</p> <p>Introduction</p> <p>Early works</p> <p>Highlights from the later period</p>	<h3 style="text-align: center;">Virsen's formula for a conical frustrum</h3> <p>In his <i>Dhavalā Tika</i> the volume Virasena gives a formula for the volume of a conical frustrum with diameters <math>a</math> and <math>b</math> at the base and top respectively, and height <math>h</math> as</p> $\frac{\pi h}{4} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$ <p>Unlike in much of the extant ancient and medieval mathematical literature in India, we find here a description of the method of determining the volume.</p> <p>Moreover, the method involves summation of an infinite series and the idea of infinitesimals, akin to calculus. The ideas are reminiscent of computations going back to Archimedes and Liu Hui, but the details are arguably new, and seem to be a notable first in the mathematics in India. In particular the work may have influenced Bhaskaracharya.</p>
--	--

## Формула Вирсены для усеченного конуса

В своей книге «Дхавала Тика» Вирасена дает формулу для объема усеченного конуса с диаметрами  $a$  и  $b$  при основании и вершине соответственно, и высотой  $h$ :

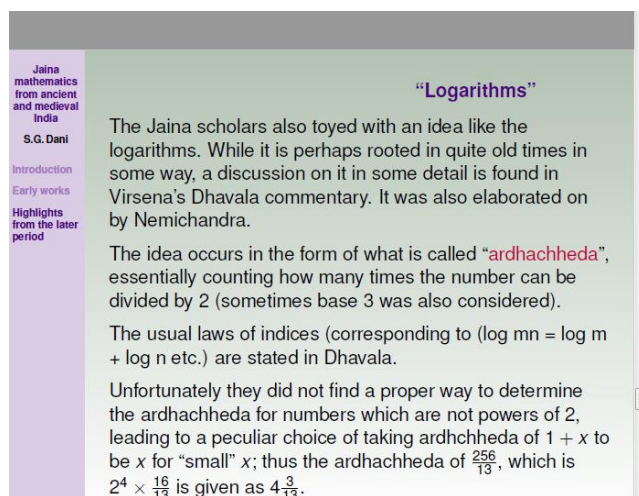
$$\frac{\pi h}{4} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

В отличие от большей части сохранившейся древней и средневековой математической литературы Индии, здесь мы находим описание метода определения объема.

Более того, метод включает в себя суммирование бесконечного ряда и идею бесконечно малых величин, сродни исчислению.

Идеи напоминают расчеты, восходящие к Архимеду и Лю Хуэю, но детали, возможно, новые и кажутся пионерскими в математике Индии. В частности, эта работа могла повлиять на Бхаскарачарью.

\*\*\*



### «Логарифмы»

Ученые-джайнисты также играли с такой идеей, как логарифмы. Хотя вопрос, возможно, каким-то образом уходит корнями в довольно старые времена, его обсуждение в некоторых деталях можно найти в комментарии Вирсены к Дхавале. Он также был разработан Немичандрой.

Идея возникает в форме того, что называется «ардхачхеда», по сути, это подсчет, сколько раз число может быть разделено на 2 (иногда также учитывалось основание 3).

Обычные законы показателей (соответствующие  $\log(mn) = \log m + \log n$ ) изложены в Дхавале.

К сожалению, они не нашли надлежащего способа определения ардхачхеда для чисел, которые не являются степенями двойки, что привело к своеобразному выбору принятия ардхачхеда

$1 + x$  к  $x$  для «малого»  $x$ ; таким образом, ardhachheda  $\frac{256}{13}$ , то есть  $2^4 \times \frac{16}{13}$  выражается как  $4\frac{3}{13}$ .

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India S.G. Dani Introduction Early works Highlights from the later period	<p><b>Mahavira's formulas for "ellipse" etc.</b></p> <p>Mahavira is known for his discussing areas and volumes of various non-standard figures, such as a conchiform, tortoise back, curved shape of a ring, etc.:</p> <p>He also gives formulae for what he refers to as "ayatavratta". "ayata" refers to rectangle and "vritta" to circle, so the figure under consideration is a rectangular, or oblong, "circle". In the literature the term is generally translated as "ellipse"; this however may not be justified; there is no description of how the figure was constructed, or any characteristic that would identify it with ellipses as in the Greek tradition.</p> <p>Invoking two parameters "ayama" and "vyasa", for the longer and shorter dimensions, say <math>a</math> and <math>b</math> respectively, the circumference of the figure is given to be <math>2a + b</math> in approximate measure, and to be <math>\sqrt{4a^2 + 6b^2}</math> in fine measure.</p>
---	---

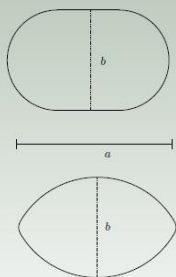
## Формулы Махавиры для «эллипса» и т. д.

Махавира известен своими обсуждениями площадей и объемов различных нестандартных фигур, таких как раковина, спина черепахи, изогнутая форма кольца и т. д.

Он также дает формулы для того, что он называет «аятаврита». «Аята» относится к прямоугольнику, а «вритта» — к кругу, поэтому рассматриваемая фигура представляет собой прямоугольный или продолговатый «круг». В литературе этот термин обычно переводится как «эллипс»; это, однако, не может быть оправдано; нет описания того, как была построена фигура, или какой-либо характеристики, которая отождествляла бы ее с эллипсами, как в греческой традиции.

Используя два параметра «аяма» и «вьяса» для более длинного и более короткого измерений: допустим,  $a$  и  $b$  соответственно, длина контура фигуры приблизительно равна  $2a + b$  и более точно равна  $\sqrt{4a^2 + 6b^2}$ .

\*\*\*

Jaina mathematics from ancient and medieval India S.G. Dani Introduction Early works Highlights from the later period	<p><b>"ellipse" continued</b></p>  <p>ayatavratta</p>
	<p>The two formulae are seen to correspond to viewing "ayatavratta" (approximately) as the shapes here; the bottom figure is a join of two bow-arrow figures (with chord <math>a</math> and arrow <math>b/2</math>), for which the early Jaina formula yields <math>\sqrt{a^2 + \frac{3}{2}b^2}</math> for each of the arcs.</p> <p>Formulas are also given for the area, involving multiplying the circumference by half of what is referred to as "vishkambha"; the term is subject to interpretations, and we will not go into it.</p>

## «Эллипс», продолжение

Эти две формулы приблизительно соответствуют «аятаврите» для представленных здесь форм; нижний рисунок представляет собой

соединение двух фигур лука и стрелы (с хордой  $a$  и стрелой  $\frac{b}{2}$ ), для которых ранняя джайнская формула дает  $\sqrt{a^2 + \frac{3}{2}b^2}$  для каждой из дуг.

Также есть формулы для площади, включающие умножение длины окружности на половину того, что называется «вишкамбхой»; термин требует толкования, и мы не будем вдаваться в подробности.

\*\*\*

mathematics from ancient and medieval India	<b>Pheru and Magic squares</b>
S.G. Dani	Pheru's work Ganita Sara Kaumudi, apart from giving an exposition of various mathematics topics of broad interest, provides improved formulae in various respects. One distinguishing feature is his treatment of Magic squares.
Introduction	
Early works	Though magic squares have been known in India for a long time, had religious significance and were used to convey good wishes, Pheru was the first one to give a systematic treatment construction of magic squares.
Highlights from the later period	Pheru classifies magic squares into three groups according to the size of the square; those of odd order, of order divisible by 4 and of even order not divisible by 4. He gives general constructions for the first two groups. As to the last, only a magic square of order 6 is described (presumably he had difficulty for larger values).  Pheru also discusses ways of transforming a magic square into another.

## Феру и магические квадраты

Работа Феру Ганита Сара Каумуди, помимо изложения различных тем математики, представляющих широкий интерес, содержит в различных отношениях улучшенные формулы. Отличительной чертой является его трактовка магических квадратов.

Хотя магические квадраты были известны в Индии уже давно, имели религиозное значение и использовались для передачи добрых пожеланий, Феру был первым, кто дал систематическую трактовку построения магических квадратов.

Феру классифицирует магические квадраты на три группы в зависимости от размера квадрата: нечетного порядка; порядка, кратного 4; и четного порядка, не кратного 4. Он дает общие построения для первых двух групп. Что касается последнего, то описан только магический квадрат 6-го порядка (предположительно у него были трудности с большими значениями). Феру также обсуждает способы преобразования одного магического квадрата в другой.

\*\*\*



Jaina  
mathematics  
from ancient  
and medieval  
India  
S.G.Dani  
Introduction  
Early works  
Highlights  
from the later  
period

### A $9 \times 9$ magic square of Pheru

I convey my best wishes to you all by presenting this  $9 \times 9$  magic square of Pheru!!

37	48	59	70	81	2	13	24	35
36	38	49	60	71	73	3	14	25
26	28	39	50	61	72	74	4	15
16	27	29	40	51	62	64	75	5
6	17	19	30	41	52	63	65	76
77	7	18	20	31	42	53	55	66
67	78	8	10	21	32	43	54	56
57	68	79	9	11	22	33	44	46
47	58	69	80	1	12	23	34	45

The numbers in each row, each column and along the two diagonals add to 369.

## Магический квадрат Феру $9 \times 9$

Я передаю свои наилучшие пожелания всем Вам, представляя этот

$9 \times 9$  магический квадрат Феру!!


Числа в каждой строке, каждом столбце и вдоль обеих диагоналей в сумме дают 369.

\*\*\*

Jaina  
mathematics  
from ancient  
and medieval  
India  
S.G.Dani  
Introduction  
Early works  
Highlights  
from the later  
period

\* Thank you \*

for your attention.



Благодарю Вас за внимание!

